5.20 Satz. *Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$, dann beträgt der Inhalt der von den vier Kurven $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ berandeten Fläche*

$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

5.21 Satz. *Ist $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig, $\alpha < \beta$, dann beträgt der Inhalt der von den drei Kurven $r = r(\varphi)$, $\quad \varphi = \alpha$, $\quad \varphi = \beta$ berandeten Sektorfläche*

$$F = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi) \, d\varphi$$

5.22 Satz. *Ist $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$ eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve K, die von jedem Ursprungsstrahl höchstens einmal getroffen wird, dann beträgt der Inhalt der durch K begrenzten Sektorfläche*

$$F = \frac{1}{2}\left| \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)) \, dt \right|.$$

5.23 Satz. *Die Formel aus Satz 5.22 gilt auch für geschlossene überschneidungsfreie Kurven mit stückweise stetig differenzierbarer Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t), t \in [a,b]$.*

5.24 Redeweisen und Bezeichnungen. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige positive Funktion. Der Flächeninhalt F unter dem Graphen von f ist gegeben durch*

$$F = \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \,,$$

wobei wir eine äquidistante Zerlegung gewählt haben. Mit der Bezeichnung $\Delta F_i := f(\xi_i)\Delta x$ haben wir also

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \Delta F_i.$$

Es ist üblich eine Differenz Δx mit dx zu bezeichnen, wenn man im Verlauf der Rechnung den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchführen will. Bei diesem Grenzübergang geht das Summenzeichen $\sum$ in das Integral $\int$ über. In Analogie dazu bezeichnen wir auch ΔF mit dF und ersetzen für den Grenzübergang das Summenzeichen durch das Integral. Somit erhalten wir:

$$F = \int dF \qquad \textit{und} \qquad F = f(x)\,dx.$$

Diese Überlegungen kann man verallgemeinern. Sei G eine reelle Größe, die man in kleine „Bausteine“ oder Elemente dG zerlegen kann und die „aufsummiert“ wieder G ergeben. Die Summation wird als Integral bezeichnet, und somit haben wir

$$G = \int dG. \tag{5.25}$$

Weiterhin möchte man dG durch eine von x abhängige Größe der Form

$$dG = f(x)\,dx \tag{5.26}$$

annähern und erhält also

$$G = \int f(x)\,dx.$$

Beispiel: Sei K eine Kurve mit der Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, dann ist die Länge L gegeben durch (Satz 5.9)

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

Andererseits haben wir

$$L = \int ds,$$

wobei ds ein Längenelement ist. Ein Vergleich beider Formeln liefert

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt\,. \tag{5.27}$$

Insbesondere erhalten wir im Falle eines Graphen $y = f(x)$ die Formel

$$ds = \sqrt{1 + (f')^2}\, dx\,. \tag{5.28}$$

5.29 Volumen von Rotationskörpern. *Sei K ein Rotationskörper, der durch Rotation um die x-Achse entsteht. Sei $F(x)$, $x \in [a, b]$, der Flächeninhalt des Querschnittes. Das Volumenelement dV einer „dünnen Scheibe“ der Dicke dx ergibt sich also zu*

$$dV = F(x)\, dx\,,$$

und somit erhalten wir

$$V = \int dV = \int_a^b F(x)\, dx\,.$$

Die Fläche $F(x)$ des Querschnittes errechnet sich durch

$$F(x) = \pi\,(f(x))^2\,,$$

wenn $f(x)$ die den Rotationskörper beschreibende Kurve ist. Somit gilt:

5.30 Satz. *Ein durch Drehung der Kurve $y = f(x)$, $a \le x \le b$, um die x-Achse erzeugter Rotationskörper hat das Volumen*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\,.$$

5.31 Oberfläche von Rotationskörpern. *Sei K ein Rotationskörper der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ entsteht. Das Oberflächenelement dM des Mantels wird approximiert durch die Mantelfläche eines Zylinders mit dem Radius $f(x)$ und der Höhe $ds = \sqrt{1 + (f')^2}\, dx$. Also gilt*

$$M = \int dM = 2\pi \int f(x) \sqrt{1 + (f')^2}\, dx\,. \tag{5.32}$$

5.33 Numerische Integration. *Die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe endlich vieler Funktionswerte* $y_i = f(\zeta_i),\ i = 1,\dots,n$, *durch*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n g_i f(\zeta_i)$$

mit ***Gewichtsfaktoren*** g_i *nennt man* ***Quadratur****.*
Die Wahl $g_i = x_i - x_{i-1}$, *d.h. man approximiert das Integral mit Riemannschen Summen, spielt in der Praxis keine Rolle, da die Folge zu langsam konvergiert. Eine bessere Approximation liefert die* **Trapez - Regel**. *Sei* $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ *eine äquidistante Zerlegung des Intervalls* $[a,b]$ *der* ***Schrittweite*** $h := \frac{b-a}{n}$ *mit Stützstellen* $x_i = a + ih,\ i = 0,\dots,n$. *Die Kurve* $y = f(x)$ *wird im Intervall* $[x_i, x_{i+1}]$ *durch die* $(x_i, f(x_i))$ *und* $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ *verbindende Sehne ersetzt. Mit* $y_i = f(x_i)$ *und der Flächenformel für das Trapez ergibt sich*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)\ . \tag{5.34}$$

In der Praxis ist eine Halbierung der Teilintervalle sinnvoll. Für $h_n := \frac{b-a}{2^n}$ *erhält man*

$$T_0 := h_0\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right),$$
$$T_n := h_n\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h_n) + \dots + f(a+(2^n-1)h_n) + \frac{f(b)}{2}\right)\ .$$

Um von T_n *nach* T_{n+1} *zu kommen braucht man nur die neu hinzugekommenen Teilpunkte zu berücksichtigen, d.h.*

$$T_{n+1} = \frac{1}{2}\left(T_n + M_n\right),$$
$$M_n = h_n\left(f\left(a + \tfrac{h_n}{2}\right) + f\left(a + \tfrac{3h_n}{2}\right) + \dots + f\left(a + (2^n-1)\tfrac{h_n}{2}\right)\right)\ .$$

Verbreitet ist auch die ***Simpson - Regel****. Man ersetzt über dem Teilintervall* $[x_i, x_{i+2}],\ i = 0,2,\dots,2n-2$, *den Integranden* $f(x)$ *durch die Parabel die durch die Punkte* $(x_i, y_i),\ (x_{i+1}, y_{i+1}),\ (x_{i+2}, y_{i+2})$ *geht. Man erhält*

$$S_0 := \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\ ,$$

$$S_n := \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4f(a+h) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\bigl(f(a+2ih) + 2f(a+(2i+1)h)\bigr)\right] ,$$

wobei $h := \frac{b-a}{2n}$.

Kapitel 5

Potenzreihen

Eine effektive Methode bei der Lösung vieler Probleme ist die Darstellung einer Funktion $f(x)$ als eine unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

mit „einfachen“ Funktionen $f_k(x)$. Solche Reihen heißen im Falle $f_k(x) = a_k x^k$ Potenzreihen und im Falle $f_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$ Fourier - Reihen. Bevor man sich mit Reihen von Funktionen beschäftigt muss man sich genauer mit Reihen reeller Zahlen befassen.

5.1 Unendliche Reihen

1.1 Definition. *Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Durch die Festsetzung*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1.2}$$

wird eine Zahlenfolge $(S_n)_{n\geq 0}$ definiert, die die zu $(a_k)_{k\geq 0}$ gehörende ***unendliche Reihe*** *heißt und mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet wird. Die Zahlen a_k heißen* ***Glieder*** *der Reihe, die Summen S_n heißen* ***Partialsummen****. Wenn $(S_n)_{n\geq 0}$ konvergiert (bzw. divergiert) sagt man, die Reihe* ***konvergiert*** *(bzw.* ***divergiert****). Falls*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = S$$

mit $S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nennt man S die ***Summe*** *der Reihe und schreibt*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,. \tag{1.3}$$

Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist doppeldeutig:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet die Reihe als solche, d.h. die Folge $(S_n)_{n\geq 0}$,

- $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bedeutet, dass $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, d.h. die Folge $(S_n)_{n\geq 0}$ hat den Grenzwert S.

Diese Doppeldeutigkeit ist nützlich, da man bei der Untersuchung von Reihen am Anfang nicht weiß ob sie konvergieren und vermeidet dadurch Fallunterscheidungen.

1.4 Satz (Cauchy - Kriterium). *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index N_ε gibt, so dass für alle $n, m \geq N_\varepsilon$*

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

gilt.

1.5 Satz. *Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge.*

1.6 Definition. *Eine Reihe heißt* ***alternierend****, wenn aufeinander folgende Reihenglieder unterschiedliche Vorzeichen haben, d.h. $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.*

1.7 Satz (Leibnitz - Kriterium). *Für jede monoton fallende Nullfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.*

1.8 Satz. *Sei $c \in \mathbb{R}$ und seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ konvergente Reihen. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b; \quad \sum_{k=0}^{\infty} (c\, a_k) = c\, a \,.$$

• *Elementare Operationen wie Klammern Setzen oder Weglassen und Umordnen der Glieder, die für endliche Reihen erlaubt sind, sind im Allgemeinen für unendliche Reihen nicht zulässig.*

1.9 Satz. *In einer konvergenten Reihe darf man beliebig Klammern setzen, d.h.*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots = (a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots .$$

1.10 Definition. *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt* ***absolut konvergent****, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Reihen die konvergieren, aber nicht absolut konvergieren heißen* ***bedingt konvergent****.*

1.11 Satz. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

1.12 Satz. *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ beschränkt ist.*

- Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergiert}, & \text{falls } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{falls } \alpha \leq 1. \end{cases} \tag{1.13}$$

1.14 Definition. *Es sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung und $b_k = a_{\sigma(k)}$. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine* ***Umordnung*** *der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*

- Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist also auch eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, denn $\sigma^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist wieder bijektiv und $b_{\sigma^{-1}(k)} = a_k$.

1.15 Satz. *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent mit der Summe S, dann konvegiert jede Umordnung dieser Reihe ebenfalls gegen S.*

1.16 Satz (Vergleichskriterium). *Besteht für die Reihenglieder die Abschätzung*

$$0 \leq |a_k| \leq b_k \quad \textit{für} \quad k \geq k_0$$

dann gilt:

$$\textit{a)} \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \ \textit{konvergent} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ \textit{absolut konvergent},$$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty.$

1.17 Satz (Quotientenkriterium). *Sei* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \geq k_0$ *und sei* $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = a$. *Dann gilt:*

i) $a < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist absolut konvergent,*

ii) $a > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist divergent.*

- Die Bedingung kann nicht durch $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq 1$ ersetzt werden!