$$b)\ \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty.$$

1.17 Satz (Quotientenkriterium). *Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und sei $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = a$. Dann gilt:*

$$i)\ a < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent,}$$

$$ii)\ a > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist divergent.}$$

• Die Bedingung kann nicht durch $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq 1$ ersetzt werden!

1.18 Satz (Wurzelkriterium). *Es sei $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$. Dann gilt*

$$a)\ a < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent,}$$

$$b)\ a > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist divergent.}$$

1.19 Satz. *Für absolut konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gilt die Cauchysche Produktformel*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

5.2 Reihen von Funktionen

2.1 Definition. *Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktionenfolge. Falls für alle $x \in I$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\geq 0}$ den Grenzwert $f(x)$ besitzt, sagt man, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$* ***punktweise gegen f konvergiert****.*

• *Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt vom Punkt $x \in I$ ab, und damit gehen im Allgemeinen die Eigenschaften der Folge für die Grenzfunktion verloren.*

2.2 Definition. *Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$* ***konvergiert gleichmäßig*** *auf I gegen die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ einen für alle $x \in I$ gemeinsamen Index N_ε gibt, so dass gilt:*

$$n \geq N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

• *Mit diesem Konvergenzbegriff übertragen sich schöne Eigenschaften der Folge auf den Grenzwert.*

2.3 Satz. *Sind alle Funktionen f_n, $n \geq 0$, auf dem Intervall I stetig und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ auf I gleichmäßig gegen f, dann ist auch die Grenzfunktion f stetig.*

Gegenbeispiel: Die Folge $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1), \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Die Folgenglieder f_n sind stetig, aber die Grenzfunktion nicht.

2.4 Satz. *Konvergiert die Folge stetiger Funktionen f_n, $n \geq 0$, auf dem Intervall I gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\,.$$

Gegenbeispiel: Sei

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2n - n^2 x, & \text{falls } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0, & \text{falls } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Dann konvergiert $(h_n)_{n\geq 0}$ punktweise gegen 0. Aber es gilt

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_{n=0}^{1} h_n(x)\, dx \neq \int_{n=0}^{1} \lim_{n\to\infty} h_n(x)\, dx = \int_{n=0}^{1} 0\, dx = 0.$$

2.5 Satz. *Sind alle Funktionen f_n, $n \geq 0$, auf I stetig differenzierbar, konvergiert $(f_n)_{n\geq 0}$ punktweise gegen f und konvergiert $(f'_n)_{n\geq 0}$ auf I gleichmäßig, dann ist auch die Grenzfunktion f differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Gegenbeispiel: Die Folge $g_n(x) = \frac{2x}{\pi}\arctan(nx), x \in [-1,1]$ besteht aus differenzierbaren Funktionen die punktweise gegen die Funktion $x \mapsto |x|$ konvergieren. Die Grenzfunktion ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

2.6 Definition. *Sei eine Funktion f auf I als unendliche Reihe dargestellt, d.h. für alle $x \in I$ gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Man sagt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert* ***punktweise*** *(bzw.* ***gleichmäßig****) gegen $f(x)$, wenn die Folge der Partialsummen $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen f konvergiert.*

2.7 Satz. *Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ stetiger Funktionen f_k auf I gleichmäßig gegen f, dann ist*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

stetig und für alle $a, b \in I$ gilt:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right).$$

2.8 Satz. *Sind alle Funktionen f_k, $k \geq 0$, auf I stetig differenzierbar, konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf I punktweise gegen $f(x)$ und konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$ auf I gleichmäßig, dann gilt:*

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)\,.$$

2.9 Satz. *Gilt für jede Funktion f_k der auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionenfolge $(f_k)_{k\geq 0}$ eine Abschätzung*

$$|f_k(x)| \leq M_k$$

und gilt für die Zahlenreihe $(M_k)_{k\geq 0}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty,$$

dann ist die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *auf* I *gleichmäßig und absolut konvergent.*

5.3 Potenzreihen

Eine Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ mit den speziellen Funktionen $f_k(x) = a_k x^k$ heißt **Potenzreihe**. Also übertragen sich alle Ergebnisse aus dem Paragraphen 5.2 auf Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

3.1 Definition. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, *eine Potenzreihe und sei*

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R};\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert} \right\}.$$

Der ***Konvergenzradius*** R *der Potenzreihe ist definiert durch*

$$R := \begin{cases} \sup\{|x|\,;\, x \in M\} & \text{falls } M \text{ beschränkt,} \\ \infty & \text{falls } M \text{ unbeschränkt.} \end{cases}$$

• *Für* R *gibt es drei Möglichkeiten:*

$$R = 0, \qquad 0 < R < \infty, \qquad R = \infty.$$

3.2 Satz. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R. *Dann gilt:*

a) $R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *Reihe konvergiert nur für* $x = 0$.

b) Ist $R > 0$ *und* $\varrho \in (0, R)$, *dann konvergieren die Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ *absolut und gleichmäßig auf* $[-\varrho, \varrho]$.

c) Für alle x *mit* $|x| > R$ *ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *divergent.*

• Der Satz sagt nichts über $|x| = R$ aus. Die Punkte $x = -R$ und $x = R$ müssen für jede Reihe neu untersucht werden.

3.3 Berechnung des Konvergenzradius. *Der Konvergenzradius kann immer durch folgende Formel berechnet werden:*

$$R = \sup\left\{r \geq 0;\ \textit{die Folge } \left(|a_n|\, r^n\right)_{n\geq 0} \textit{ ist beschränkt}\right\},$$

wobei $R = \infty$ falls die Menge unbeschränkt ist. Oft ist es einfacher folgende Formeln zu benutzen:

a) *Sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ und sei*

$$a = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Dann ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{a}$ falls $a \neq 0$ und $R = \infty$ falls $a = 0$.

b) *Sei*

$$a = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,,$$

dann ist $R = \frac{1}{a}$ falls $a \neq 0$ und $R = \infty$ falls $a = 0$.

3.4 Definition. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und Summe $f(x)$ für $|x| < R$. Man sagt, f wird auf $(-R, R)$ durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dargestellt.*

3.5 Satz. *Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion f ist im offenen Konvergenzintervall $(-R, R)\,, R > 0$, beliebig oft differenzierbar. Die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentation:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k x^{k-2}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

etc. Die abgeleiteten Reihen haben alle den Konvergenzradius R.

Beispiel:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = f(x) \qquad |x| < 1,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \qquad |x| < 1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,x^{k-2} \qquad |x| < 1.$$

3.7 Satz. *Für alle a, b aus dem offenen Konvergenzintervall $(-R, R)$ der Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right).$$

Insbesondere ist $(a = 0,\ b = x)$

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

eine Stammfunktion von f auf $(-R, R)$, deren Konvergenzradius R ist.

3.8 Satz. *Wir haben folgende Potenzreihendarstellungen:*

a) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \qquad x \in \mathbb{R},$$

b) $$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

c) $$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

d) $$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad |x| < 1,$$

e) $$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \qquad |x| < 1.$$