2.2 Definition. *Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$* ***konvergiert gleichmäßig*** *auf I gegen die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ einen für alle $x \in I$ gemeinsamen Index N_ε gibt, so dass gilt:*

$$n \geq N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

• *Mit diesem Konvergenzbegriff übertragen sich schöne Eigenschaften der Folge auf den Grenzwert.*

2.3 Satz. *Sind alle Funktionen f_n, $n \geq 0$, auf dem Intervall I stetig und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ auf I gleichmäßig gegen f, dann ist auch die Grenzfunktion f stetig.*

Gegenbeispiel: Die Folge $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1), \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Die Folgenglieder f_n sind stetig, aber die Grenzfunktion nicht.

2.4 Satz. *Konvergiert die Folge stetiger Funktionen f_n, $n \geq 0$, auf dem Intervall I gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\,.$$

Gegenbeispiel: Sei

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2n - n^2 x, & \text{falls } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0, & \text{falls } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Dann konvergiert $(h_n)_{n\geq 0}$ punktweise gegen 0. Aber es gilt

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_{n=0}^{1} h_n(x)\, dx \neq \int_{n=0}^{1} \lim_{n\to\infty} h_n(x)\, dx = \int_{n=0}^{1} 0\, dx = 0.$$

2.5 Satz. *Sind alle Funktionen* f_n, $n \geq 0$, *auf* I *stetig differenzierbar, konvergiert* $(f_n)_{n\geq 0}$ *punktweise gegen* f *und konvergiert* $(f'_n)_{n\geq 0}$ *auf* I *gleichmäßig, dann ist auch die Grenzfunktion* f *differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Gegenbeispiel: Die Folge $g_n(x) = \frac{2x}{\pi}\arctan(nx), x \in [-1,1]$ besteht aus differenzierbaren Funktionen die punktweise gegen die Funktion $x \mapsto |x|$ konvergieren. Die Grenzfunktion ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

2.6 Definition. *Sei eine Funktion* f *auf* I *als unendliche Reihe dargestellt, d.h. für alle* $x \in I$ *gilt* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. *Man sagt die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *konvergiert* ***punktweise*** *(bzw.* ***gleichmäßig****) gegen* $f(x)$, *wenn die Folge der Partialsummen* $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen* f *konvergiert.*

2.7 Satz. *Konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *stetiger Funktionen* f_k *auf* I *gleichmäßig gegen* f, *dann ist*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

stetig und für alle $a, b \in I$ *gilt:*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)\, dx\right).$$

2.8 Satz. *Sind alle Funktionen* f_k, $k \geq 0$, *auf* I *stetig differenzierbar, konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *auf* I *punktweise gegen* $f(x)$ *und konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$ *auf* I *gleichmäßig, dann gilt:*

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x).$$

2.9 Satz. *Gilt für jede Funktion* f_k *der auf dem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *definierten Funktionenfolge* $(f_k)_{k\geq 0}$ *eine Abschätzung*

$$|f_k(x)| \leq M_k$$

und gilt für die Zahlenreihe $(M_k)_{k\geq 0}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty,$$

dann ist die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *auf* I *gleichmäßig und absolut konvergent.*

5.3 Potenzreihen

Eine Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ mit den speziellen Funktionen $f_k(x) = a_k x^k$ heißt **Potenzreihe**. Also übertragen sich alle Ergebnisse aus dem Paragraphen 5.2 auf Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

3.1 Definition. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, *eine Potenzreihe und sei*

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R};\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \textit{ konvergiert} \right\}.$$

Der ***Konvergenzradius*** R *der Potenzreihe ist definiert durch*

$$R := \begin{cases} \sup\{|x|\,;\, x \in M\} & \textit{falls } M \textit{ beschränkt}, \\ \infty & \textit{falls } M \textit{ unbeschränkt}. \end{cases}$$

• *Für* R *gibt es drei Möglichkeiten:*

$$R = 0, \qquad 0 < R < \infty, \qquad R = \infty.$$

3.2 Satz. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R. *Dann gilt:*

a) $R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *Reihe konvergiert nur für* $x = 0$.

b) Ist $R > 0$ *und* $\varrho \in (0, R)$, *dann konvergieren die Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ *absolut und gleichmäßig auf* $[-\varrho, \varrho]$.

c) Für alle x *mit* $|x| > R$ *ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *divergent.*

• Der Satz sagt nichts über $|x| = R$ aus. Die Punkte $x = -R$ und $x = R$ müssen für jede Reihe neu untersucht werden.

3.3 Berechnung des Konvergenzradius. *Der Konvergenzradius kann immer durch folgende Formel berechnet werden:*

$$R = \sup \left\{ r \geq 0;\ \textit{die Folge } \left(|a_n|\, r^n \right)_{n \geq 0} \textit{ ist beschränkt} \right\},$$

wobei $R = \infty$ falls die Menge unbeschränkt ist. Oft ist es einfacher folgende Formeln zu benutzen:

a) Sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ und sei

$$a = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|.$$

Dann ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{a}$ falls $a \neq 0$ und $R = \infty$ falls $a = 0$.

b) Sei

$$a = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

dann ist $R = \frac{1}{a}$ falls $a \neq 0$ und $R = \infty$ falls $a = 0$.

3.4 Definition. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und Summe $f(x)$ für $|x| < R$. Man sagt, f wird auf $(-R, R)$ durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dargestellt.*

3.5 Satz. *Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion f ist im offenen Konvergenzintervall $(-R, R)$, $R > 0$, beliebig oft differenzierbar. Die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentation:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k x^{k-2}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

etc. Die abgeleiteten Reihen haben alle den Konvergenzradius R.

Beispiel:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = f(x) \qquad |x| < 1,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \qquad |x| < 1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,x^{k-2} \qquad |x| < 1.$$

3.7 Satz. *Für alle a, b aus dem offenen Konvergenzintervall $(-R, R)$ der Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right).$$

Insbesondere ist $(a = 0,\ b = x)$

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

eine Stammfunktion von f auf $(-R, R)$, deren Konvergenzradius R ist.

3.8 Satz. *Wir haben folgende Potenzreihendarstellungen:*

a) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \qquad x \in \mathbb{R},$$

b) $$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

c) $$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

d) $$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad |x| < 1,$$

e) $$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \qquad |x| < 1.$$

3.9 Satz. *Für alle x mit $|x| < 1$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\,,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \cdots \cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

- Die Formel aus Satz 3.9 enthält als Spezialfälle:

1) $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = 0 \qquad \text{falls } n < k$$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \text{(klassische binomische Formel)}$$

2) $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 0, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2k-3)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2k)}, \quad k \geq 2$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \cdots\,, \qquad (3.10)$$

falls $|x| < 1$.

3) $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2k)}, \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \pm \cdots\,, \qquad (3.11)$$

falls $|x| < 1$.

3.12 Definition. *Eine unendliche Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \tag{3.13}$$

heißt ***Potenzreihe mit Zentrum a****.*

- *Für theoretische Überlegungen reicht es* $a = 0$ *zu betrachten, denn durch Substitution* $z = x - a$ *geht die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ *in die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *mit Zentrum in 0 über.*
- *Der* ***Konvergenzradius*** *von (3.13) ist der Konvergenzradius der entsprechenden Reihe mit Zentrum 0.*

3.14 Lemma. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann gilt:*

i) $x \in (a-R, a+R) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ *konvergiert,*

i) $x \notin [a-R, a+R] \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ *divergiert.*

3.15 Koeffizientenvergleich. *Sei* f *auf Intervall* $(a-R, a+R)$ *als Potenzreihe* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ *dargestellt. Nach Satz 3.5 gilt für die n-te Ableitung*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \cdots \cdot (k-n+1)\, a_k (x-a)^{k-n} .$$

Setzt man $x = a$*, so erhält man* $f^{(n)}(a) = n! a_n$*.*

3.16 Satz (Eindeutigkeit von Potenzreihen). *Sei* $R > 0$ *und gelte für alle* $x \in (a-R, a+R)$*:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k ,$$

dann haben wir

$$a_k = b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

5.4 Taylor Reihen

4.1 Satz. *Für jede auf dem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion f und $a, x \in I$ gilt:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x,a)\,,$$

wobei

$$T_n(x,a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

das ***Taylor-Polynom*** *ist und das* ***Restglied*** *$R_{n+1}(x,a)$ die Darstellungen*

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,,$$

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}\,, \quad \xi \text{ zwischen } x \text{ und } a,$$

hat.

4.2 Satz. *Ist die Funktion f auf dem Intervall I n-mal stetig differenzierbar und $a \in I$ mit*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

dann gilt:

i) a Extremstelle $\Leftrightarrow$ n gerade,

ii) n gerade, $f^{(n)}(a) < 0$ $\Rightarrow$ lokales Maximum,
n gerade, $f^{(n)}(a) > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum.

4.3 Definition. *Sei f auf dem offenen Intervall I beliebig oft differnenzierbar und sei $a \in I$. Die unendliche Reihe*

$$T_f(x,a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

heißt ***Taylor-Reihe*** *mit Zentrum a. Gilt für alle $x \in (a-R, a+R)$ die Gleichung $f(x) = T_f(x,a)$, so sagt man, dass sich f* ***um*** *a* ***als Taylor-Reihe entwickeln lässt****.*

4.4 Satz. *Sei f auf dem Intervall I beliebig oft differenzierbar und sei $a \in I$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe $T_f(x,a)$ genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied $R_n(x,a)$ mit $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass es Konstanten A, B gibt mit*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq A\,B^n \qquad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

4.5 Methoden der Reihenentwicklung.

1) ***Die Taylor-Formel***

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + R_{n+1}\,(x,a)$$

mit dem Nachweis, dass $R_n(x,a) \to 0$, liefert, dass die Taylor-Reihe gegen $f(x)$ konvergiert.

2) *Bekannte* ***Reihen differenzieren oder integrieren****. Die Sätze 3.5 und 3.7 ermöglichen es, durch gliedweise Differentiation und Integration bekannter Reihen neue Reihenentwicklung zu erhalten (siehe Satz 3.8).*

3) ***Summe und/oder Produkt bekannter Reihen liefert neue Reihenentwicklungen.*** *Die Definition von* $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ *und* $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ *zusammen mit der Reihenentwicklung für* e^x *liefert:*

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad && x \in \mathbb{R}, \\ \sinh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad && x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

4) ***Potenzreihen in einander einsetzen***
Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. *Wenn man die Potenzen nach dem Cauchy-Produkt (Satz 1.19) berechnet, d.h.*

$$g(x)^k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)^k =: \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn} x^n\,,$$

dann erhält man

$$f\left(g(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{kn} x^n \right).$$

Dies, nach steigenden x Potenzen geordnet, gibt

$$f\big(g(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{kn} \right) x^n.$$

4.7 Grenzwertberechnung. *Durch Einsetzen der Reihenentwicklung der entsprechenden Funktion erhält man eine rationale Funktion in x deren Grenzwert einfacher zu berechnen ist. Diese Methode ist eine Alternative zur Regel von de l'Hospital.*

4.8 Näherungsformeln. *In komplizierten, funktionalen Zusammenhängen kann man durch Einsetzen der Reihenentwicklung die „dominanten" Terme bestimmen.*

4.9 Berechnung nicht elementar integrierbarer Integrale. *Einige Integrale besitzen keine in geschlossener Form darstellbare Stammfunktion. Durch die Reihendarstellung des Integranden erhält man oft eine Darstellung des Integrals als unendliche Reihe.*

4.10 Reihenansatz zur Lösung von Differentalgleichungen. *Zur Lösung einfacher Differentialgleichungen kann man die Lösung $S(t)$ mit Hilfe des Ansatzes*

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

bestimmen.

Kapitel 6

Lineare Algebra

Bei der Lösung verschiedenster Probleme wird man letztendlich mit der Lösung von Gleichungssystemen konfrontiert. Die damit eng verbundenen Problematiken werden in diesem Kapitel behandelt.

6.1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

1.1 Definition. *Ein Rechteckiges Zahlenschema der Form*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

*mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ heißt $m \times n$ **Matrix**. Die Zahlen a_{ij} heißen **Elemente** der Matrix $\mathbf{A}$. Man schreibt abkürzend*

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \tag{1.3}$$

*Insbesondere heißen $m \times 1$-Matrizen **Spaltenvektoren** und $1 \times n$-Matrizen **Zeilenvektoren**. Sie haben die Form:*

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z} = (a_1, \dots, a_n) .$$

- Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ vom Typ $m \times n$ besteht aus m Zeilenvektoren und n Spaltenvektoren. Seien

$$\mathbf{z}_i := (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

$$\mathbf{s}_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

dann schreibt man die Matrix $\mathbf{A}$ in **Zeilen-** bzw. **Spaltendarstellung**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) \,.$$

- Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})$ sind genau dann gleich, in Zeichen $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ vom Typ $m \times n$ sind und $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$ gilt, d.h. wenn sie elementweise gleich sind.

- Die Menge aller $m \times n$ Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m\times n}$. Insbesondere schreiben wir $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n\times 1}$ (Spaltenvektoren) und $\mathbb{R}_m := \mathbb{R}^{1\times m}$ (Zeilenvektoren).

1.4 Definition. *Für Matrizen* $\mathbf{A} = (a_{ij})\,, \mathbf{B} = (b_{ij})$ *aus* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist die **Summe*** $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *und das **skalare Vielfache*** $\lambda\mathbf{A}$ *elementweise definiert, d.h.*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (c_{ij})\,,$$
$$\lambda\mathbf{A} = (d_{ij})\,,$$

wobei $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$ *und* $d_{ij} := \lambda a_{ij}$ *für* $i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$.

- Summen und skalare Vielfache für Spalten- und Zeilenvektoren definiert man komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Zeilenvektoren werden analog behandelt.

- Wiederholung der Konvention: Falls ein Spaltenvektor in einer Zeile geschrieben steht, dann schreiben wir

$$(a_1, \dots, a_n)^T := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- Wir haben

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und somit lässt sich jeder Spaltenvektor $a \in \mathbb{R}^n$ eindeutig als Summe

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_n\mathbf{e}_n \tag{1.5}$$

mit den **Standard Basisspaltenvektoren**

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

darstellen. Das System $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ heißt **Standardbasis** des $\mathbb{R}^n$. Analog lässt sich jeder Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_n$ als Summe der **Standardzeilenbasisvektoren** $\mathbf{e}'_i$, $i = 1, \dots, n$, darstellen, wobei

$$\mathbf{e}'_1 := (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}'_n := (0, \dots, 0, 1).$$

Das System $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ heißt **Standardbasis** des $\mathbb{R}_n$.

- Auf Grund der Darstellung von Matrizen mit Hilfe ihrer Spalten- bzw. Zeilenvektoren und der Defintion der Summe und des skalaren Vielfachen von Spalten- bzw. Zeilenvektoren, kann man diese Operationen auch spaltenweise ausführen, d.h. sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n), \\ \lambda \mathbf{A} &= (\lambda \mathbf{a}_1, \dots, \lambda \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

- Für jede Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ bezeichnet man die Matrix $(-1)\,\mathbf{A} = (-a_{ij})$ mit $-\mathbf{A}$. Die **Differenz** zweier Matrizen ist durch

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} =: \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

definiert. Die Matrix deren sämtlichen Elemente 0 Null sind heißt **Nullmatrix**, in Zeichen $\underline{0}$. Die Nullmatrix $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\underline{0} \in \mathbb{R}_n$ heißt **Nullvektor**.

- Die Rechenregeln reeller Zahlen übertragen sich auf Grund der komponentenweisen Definition der Addition und der Skalaren Multiplikation auf Matrizen. Es gilt für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \\ \mathbf{A} + 0 &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &= 0 \\ (\lambda\mu)\,\mathbf{A} &= \lambda\,(\mu\mathbf{A}) \\ 1\mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ (\lambda + \mu)\,\mathbf{A} &= \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A} \\ \lambda\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} \end{aligned} \tag{1.7}$$

- Matrizen treten in natürlicher Weise bei Gleichungssystemen auf.

1.8 Definition. *Ein* ***lineares Gleichungssystem*** *mit m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ hat die Form*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1.9}$$

*wobei a_{ij} die **Koeffizienten** und b_i die **Absolutglieder** sind. Falls $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, heißt das System **homogen**, ansonsten **inhomogen**.*

- (1.9) kann man auch als

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1.10}$$

  schreiben.

- Wir suchen Werte c_i für die Unbekannten x_i so, dass das lineare Gleichungssystem (1.9) erfüllt ist. Solche Werte heißen **Lösung** des Systems (1.9) und werden entweder in der Form

$$x_1 = c_1, \ \ldots, x_n = c_n$$

  oder als Spaltenvektor

$$c = (c_1, \ldots, c_n)^T$$

  angegeben.

- Jedes homogene Gleichungssystem besitzt mindestens die **triviale Lösung**