*wobei a_{ij} die **Koeffizienten** und b_i die **Absolutglieder** sind. Falls $b_i = 0,\ i = 1, \ldots, m$, heißt das System **homogen**, ansonsten **inhomogen**.*

- (1.9) kann man auch als

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1.10}$$

  schreiben.

- Wir suchen Werte c_i für die Unbekannten x_i so, dass das lineare Gleichungssystem (1.9) erfüllt ist. Solche Werte heißen **Lösung** des Systems (1.9) und werden entweder in der Form

$$x_1 = c_1,\ \ldots, x_n = c_n$$

  oder als Spaltenvektor

$$\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$$

  angegeben.

- Jedes homogene Gleichungssystem besitzt mindestens die **triviale Lösung**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\,.$$

- Nicht jedes System ist lösbar. Es können folgende Fälle auftreten:

a) keine Lösung:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

b) genau eine Lösung:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Wir wollen das Verfahren am konkreten Beispiel vorstellen:

- Koeffizienten von x_1 in 1. Gleichung = 1, d.h. 1. Gleichung $\times\frac{1}{3}$

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \frac{1}{3}\\
3x_1 + x_2 &= 5
\end{aligned}
$$

- Eliminieren von x_1 aus 2. Gleichung, d.h. 2. Gleichung - $3\times$ 1. Gleichung; Koeffizient von x_2 in 2. Gleichung = 1, d.h. 2. Gleichung $\times(-1)$

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{2}{3} &= \frac{1}{3}\\
x_2 &= -4
\end{aligned}
$$

- Eliminieren von x_2 aus 1. Gleichung, d.h. 1. Gleichung - $\frac{2}{3}\times$ 2. Gleichung

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3\\
x_2 &= -4
\end{aligned}
$$

Also ist $x_1 = 3, x_2 = -4$ die Lösung.

c) unendlich viele Lösungen

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

Das ist eine Geradengleichung, mit einem Parameter λ. Also ist

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \lambda\\
x_1 &= \frac{1}{3}(1 - 2\lambda)
\end{aligned}
$$

eine Lösung für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.11 Definition. *Sei $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \dots, m$ ein lineares Gleichungssystem. Die Matrix*

$$\mathbf{A} := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

*heißt **Koeffizientenmatrix**, der Spaltenvektor*

$$\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$$

heißt rechte Seite und die Matrix bestehend aus den Spaltenvektoren $\mathbf{a}_i$ der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und der rechten Seite $\mathbf{b}$

$$\big(\mathbf{A}\big|\mathbf{b}\big) := \big(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\big|\mathbf{b}\big) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$$

*heißt **erweiterte Koeffizientenmatrix**.*

1.12 Satz. *Folgende Umformungen eines Gleichungssystems verändern die Lösungen nicht:*

a) Vertauschen zweier Gleichungen,

b) Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\alpha \neq 0$,

c) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen.

• Die Umformungen aus Satz 1.12 haben Entsprechungen für die erweiterte Koeffizientenmatrix.

1.13 Definition. *Sei $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ eine erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystemes. Die folgenden Umformungen der Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ heißen* ***elementare Zeilenumformungen****:*

a) Vertauschen zweier Zeilen,

b) Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0$,

c) Addition des α-fachen einer Zeile zu einer anderen.

1.14 Satz. *Entsteht $(\mathbf{B}|\mathbf{c})$ aus $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ durch endlich viele elementare Zeilenumformungen, so haben die zugehörigen Gleichungssysteme $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = c_i$ und $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ dieselben Lösungen.*

1.15 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren. *Das* ***Gauß'sche Eliminationsverfahren*** *besteht aus folgenden Schritten, die an der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ eines linearen Gleichungssystems ausgeführt werden:*
1. Schritt: *Ausräumen der 1. Spalte. Wir bilden die Buchführungsmenge $B = \{1\}$ und räumen dann die 1. Spalte aus. Dazu vertauschen wir Spalten derart, daß in der 1. Zeile der 1. Spalte eine Zahl $a \neq 0$ steht. Durch Multiplikation der 1. Zeile mit a^{-1} machen wir daraus eine 1. Danach werden aus allen anderen Zahlen in der 1. Spalte durch Elementarumformungen vom Typ c) Nullen erzeugt.*
2. Schritt: *Wir suchen die nächste Spalte, die unterhalb der 1. Zeile nicht nur aus Nullen besteht. Wir fügen die Nummer dieser Spalte, es sei die j_2-te Spalte, zur Buchführungsmenge dazu, d.h. $B = \{1, j_2\}$. Danach räumen wir die j_2-te Spalte aus, d.h. durch eventuelles Vertauschen von Zeilen mit Index > 1 erhalten wir in der 2. Zeile der j_2-ten Spalte eine Zahl ungleich*

*Null. Diese Zahl wird zu einer 1 umgeformt und danach **alle** anderen Glieder dieser Spalte zu Null umgeformt.*
3. Schritt: *Der zweite Schritt wird analog so lange wiederholt, bis alle Spalten der Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A}$ *ausgeräumt sind. Wir erhalten dadurch eine Buchführungsmenge* $B = \{1, j_1, \ldots, j_r\}$ *mit* $1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ *und eine erweiterte Koeffizientenmatrix mit **Stufenform**. Etwa bei 6 Gleichungen mit 10 Unbekannten und* $B = \{1, 5, 8, 9\}$.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & * & * & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

• Die Buchführungsmenge $B = \{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß in der j_k-ten Spalte in der k-ten Zeile eine 1 steht und sonst nur Nullen.

1.16 Satz (Lösbarkeit). *Sei eine erweiterte Koeffizientenmatrix in Stufenform mit Buchführungsmenge* $B = \{j_1, \ldots, j_r\}$. *Dann besitzt das zugehörige lineare Gleichungssystem genau dann Lösungen, wenn alle Absolutglieder* b_i *mit Index* $i > r$ *Null sind.*

1.17 Satz (Konstruktion aller Lösungen). *Ist* n *die Anzahl der Unbekannten und ist das System lösbar, so werden die Lösungen durch* $n - r$ *Parameter beschrieben, wobei* r *die Anzahl der Elemente der Buchführungsmenge* B *ist.*

1.18 Definition. *Die im Beweis von Satz 1.17 in Abhängigkeit von den Parametern* $c_j, j \notin B$, *konstruierte Lösung heißt **allgemeine Lösung**. Jede spezielle Wahl der Parameter liefert eine **spezielle Lösung**.*

1.19 Satz (Eindeutigkeit). *Das System ist genau dann eindeutig lösbar wenn es lösbar ist und* $n = r$, *d.h.* $B = \{1, \ldots, n\}$.

1.20 Folgerung. *Das homogene System, d.h.* $b_i = 0, i = 1, \ldots, m$, *besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn* $r = n$.

1.21 Satz (Struktur der Lösungsmenge).

a) Seien $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ *Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Dann sind auch* $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ *und* $\lambda\mathbf{c}, \lambda \in \mathbb{R}$*, Lösungen.*

b) Sei das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ *lösbar. Dann läßt sich eine allgemeine Lösung* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *darstellen in der Form*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$$

mit einer speziellen Lösung $\mathbf{v}_0$ *und einer allgemeinen Lösung* $\mathbf{u}$ *des zugehörigen homogenen Systems.*

6.2 Matrizenmultiplikation

2.1 Definition. *Das* ***Produkt*** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *eines Zeilenvektors* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_n$ *und eines Spaltenvektors* $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ *ist definiert durch*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \,.$$

- Eine lineare Gleichung kann man jetzt kompakter schreiben als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$$

  mit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

- Es gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a} \in \mathbb{R}_n$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2, \\ \alpha\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\alpha\,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\,\mathbf{b})\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.3 Definition. *Für* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ *hat das* ***Matrizenprodukt*** $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ *die Einträge*

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r\,, \tag{2.4}$$

d.h. c_{ij} *ist das Produkt der* i*-ten Zeile von* $\mathbf{A}$ *mit der* j*-ten Spalte von* $\mathbf{B}$.

- Achtung! Wenn die Spaltenanzahl von $\mathbf{A}$ ungleich der Zeilenanzahl von $\mathbf{B}$ ist, ist das Produkt nicht definiert!

- Ein $m \times n$ Gleichungssystem $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$ kann man kompakter als

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.5}$$

schreiben, mit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

- Für den Spezialfall $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{s} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_m \cdot \mathbf{s} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

wobei $\mathbf{z}_i, i = 1, \ldots, m$ die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ sind.

- Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, seien $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \ldots, n$ die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ und sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n \,. \tag{2.7}$$

Setzt man nun $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i, i = 1, \ldots, n$, so erhält man

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i \,,$$

d.h. Multiplikation einer Matrix $\mathbf{A}$ mit dem i-ten Basisspaltenvektor $\mathbf{e}_i$ liefert i-ten Spaltenvektor von $\mathbf{A}$. Analog gilt:

$$\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{A} = \mathbf{z}_j, \qquad j = 1, \ldots, m \,,$$

d.h. Multiplikation des j-ten Basiszeilenvektors $\mathbf{e}'_j$ mit $\mathbf{A}$ liefert die j-te Zeile von $\mathbf{A}$.

- Die Matrix

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

  heißt $n \times n$ **Einheitsmatrix**, sie hat die Spaltendarstellung $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ mit den Basisspaltenvektoren $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$.

2.9 Satz. *Für alle Matrizen* $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n\times r}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times s}$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:*

a) $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}$,

b) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_2$,

c) $\alpha\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha\,\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha\,\mathbf{B})$,

d) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$,

e) $\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$.

- Aber im Allgemeinen gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\,,$$

  auch wenn beide Produkte definiert sind.

- Es gibt Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \neq 0$ so daß $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Dies ist bei reellen Zahlen nicht möglich, denn es gilt: $a \cdot b = 0 \;\Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$.

- **Potenzen** von quadratischen Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sind rekursiv definiert:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{A}^k := \mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k\text{-mal}} \tag{2.10}$$

2.11 Definition. *Zu jeder $m \times n$ Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt es eine* ***transponierte Matrix*** $\mathbf{A}^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$*, deren i-te Zeile aus den Koeffizienten der i-ten Spalte von $\mathbf{A}$ bestehen, d.h. für*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

ist die transponierte Matrix gegeben durch

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \ \cdots \ a_{m1}} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \boxed{a_{1n} \ \cdots \ a_{mn}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \,.$$

- *Die Bezeichnung ist konsistent mit unserer Schreibweise $(a_1, \ldots, a_n)^T$ für Spaltenvektoren.*

- *Es gelten folgende Rechenregeln für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \,, \\ (\alpha\, \mathbf{A})^T &= \alpha\, \mathbf{A}^T \,, \\ \left(\mathbf{A}^T\right)^T &= \mathbf{A} \,, \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.13 Definition. *Eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ heißt* ***symetrisch****, wenn $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ gilt; sie heißt* ***schiefsymmetrisch****, falls $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ gilt.*

- *Das Transponieren einer Matrix macht aus einer Zeile eine Spalte. Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{lll} i\text{-te Zeile von } \mathbf{A} & \text{ist} & (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \,, \\ i\text{-te Zeile von } \mathbf{A}^T & \text{ist} & (a_{1i}, \ldots, 1_{ni}) \,. \end{array}$$

  Somit gilt für symmetrische Matrizen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \,, \tag{2.14}$$

und analog gilt für schiefsymmetrische Matrizen:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji} \qquad i,j = 1,\dots,n\,. \tag{2.15}$$

Insbesondere gilt für die Diagonaelemente einer schiefsymmetrischen Matrix $a_{ii} = 0$.

2.16 Definition. *Eine Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *heißt* ***invertierbar****, wenn es eine Matrix* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt, so daß* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$ *gilt. Diese Matrix* $\mathbf{B}$ *ist eindeutig bestimmt, wird mit* $\mathbf{A}^{-1}$ *bezeichnet, und heißt* ***inverse Matrix*** *von* $\mathbf{A}$.

2.17 Satz. *Wenn es zu einer Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *zwei Matrizen* $\mathbf{B},\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt, mit* $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{E}$ *dann ist* $\mathbf{A}$ *invertierbar und es gilt:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\,.$$