- *Das Transponieren einer Matrix macht aus einer Zeile eine Spalte. Sei* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Dann gilt:*

$$\begin{array}{ll} i\text{-te Zeile von } \mathbf{A} & (a_{i1}, \dots, a_{in})\,, \\ i\text{-te Zeile von } \mathbf{A}^T & (a_{1i}, \dots, 1_{ni})\,. \end{array}$$

  Somit gilt für symmetrische Matrizen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n\,, \tag{2.14}$$

  und analog gilt für schiefsymmetrische Matrizen:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n\,. \tag{2.15}$$

  Insbesondere gilt für die Diagonaelemente einer schiefsymmetrischen Matrix $a_{ii} = 0$.

2.16 Definition. *Eine Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *heißt* ***invertierbar****, wenn es eine Matrix* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt so, dass* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$ *gilt. Diese Matrix* $\mathbf{B}$ *ist eindeutig bestimmt, wird mit* $\mathbf{A}^{-1}$ *bezeichnet und heißt* ***inverse Matrix*** *von* $\mathbf{A}$.

2.17 Satz. *Wenn es zu einer Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *zwei Matrizen* $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt mit* $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{E}$*, dann ist* $\mathbf{A}$ *invertierbar und es gilt:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\,.$$

- Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\quad ad - bc \neq 0$ gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.18 Satz.

a) Die inverse Matrix einer invertierbaren Matrix $\mathbf{A}$ *ist invertierbar und es gilt:*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}\,.$$

b) Das Produkt zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar und es gilt:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\,.$$

c) Die Transponierte $\mathbf{A}^T$ einer Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $\mathbf{A}$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T\,.$$

- Für das Produkt mehrerer invertierbarer Matrizen $\mathbf{A}_i, i = 1,\dots,n$, gilt:

$$(\mathbf{A}_1\cdot\ldots\cdot\mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1}\cdot\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\,. \tag{2.19}$$

- Invertierbare Matrizen sind bedeutend für die Lösung von Gleichungssystemen. Aus der Gleichung

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

folgt

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,,$$

falls die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist. Dieses so berechnete $\mathbf{x}$ ist die eindeutige Lösung des obigen linearen Gleichungssystems.

2.20 Diagonal- und Dreiecksmatrizen. *Sei $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Die Elemente $a_{ii}, i = 1,\dots,n$, nennt man **Diagonalelemente**. Eine Matrix die nur auf der Diagonalen nichttriviale Einträge hat heißt **Diagonalmatrix**. Wir schreiben*

$$\operatorname{Diag}(a_1,\dots,a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

*Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $1 \le j < i \le n$ gilt, d.h. alle Einträge unterhalb der Diagonalen sind Null, heißt **obere Dreiecksmatrix**. Analog heißt eine Matrix **untere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $1 \le i < j \le n$ gilt.*

2.21 Satz. *Eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn alle Diagonalelemente von Null verschieden sind.*

- Im Spezialfall $\mathbf{A} = \operatorname{Diag}(a_1,\dots,a_n)$ mit $a_i \neq 0, \quad i = 1,\dots,n$, gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{Diag}\left(a_1^{-1},\dots,a_n^{-1}\right)$$

6.3 Vektorräume

3.1 Definition. *Eine nichtleere Menge V, in der man zu je zwei Elementen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ eine Summe $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ und zu jedem Element $\mathbf{a} \in V$ und jedem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ das λ-fache $\lambda\mathbf{a} \in V$ bilden kann, heißt* $\mathbb{R}$-***Vektorraum****, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(V.1) *Die Addition ist kommutativ, d.h. für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ gilt:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}\,.$$

(V.2) *Die Addition ist assoziativ, d.h. für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ gilt:*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})\,.$$

(V.3) *Es gibt ein Element $\mathbf{0} \in V$, Nullvektor genannt, mit*

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

für alle $\mathbf{a} \in V$.

(V.4) *Zu jedem $\mathbf{a} \in V$ gibt es genau ein mit $-\mathbf{a}$ bezeichnetes Element in V mit*

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}\,.$$

(V.5) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ *für alle $\mathbf{a} \in V$.*

(V.6) $\lambda\,(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\,\mathbf{a}$ *für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V$.*

(V.7) $\lambda\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ *für alle $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$.*

(V.8) $(\mu + \lambda)\,\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}$ *für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V$.*

Die Elemente des Vektorraums V nennt man ***Vektoren****.*

Beispiele:

1) $V = \mathbb{R}^{m\times n}$ ist ein Vektorraum mit den komponentenweise definierten Operationen Addition und skalarer Multiplikation (siehe (1.7)).

2) Insbesondere sind

$$\mathbb{R}_n = \{(a_1, \ldots, a_n)\,; a_i \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n)^T\,; a_i \in \mathbb{R}\}$$

Vektorräume

3) Die Menge

$$P_n := \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n; a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n\}$$

der Polynome vom Grad $\leq n$ mit punktweise definierter Addition und skalarer Multiplikation ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

4) Die Menge $C^0(I) := \{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$ der stetigen Funktionen mit den Operationen

$$(f+g)\,(x) : = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)\,(x) : = \lambda f(x)$$

bildet den Vektorraum der stetigen Funktionen.

- Im folgenden sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

3.2 Definition. *Eine nichtleere Menge $U \subseteq V$ heißt **Unterraum** von V, wenn zu je zwei Elementen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ auch deren Summe $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ in U liegt und wenn mit jedem $\mathbf{u} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda\mathbf{u}$ in U liegt, d.h.:*

(U.1) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} \in U,$

(U.2) $\mathbf{u} \in U, \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{u} \in U,$

(U.3) $\mathbf{0} \in U.$

- *Man sagt, dass ein Unterraum U **abgeschlossen** bezüglich Addition und skalarer Multiplikation ist, wenn $(U.1)$ und $(U.2)$ gelten. Aus den Axiomen $(V.1) - (V.8)$ folgt somit sofort, dass auch U ein Vektorraum ist.*

Beispiele:

1) V besitzt die **trivialen Unterräume** $U = \{\mathbf{0}\}, U = V$.

2) Sei $\mathbf{v} \in V$. Dann ist

$$U := \{\lambda \mathbf{v}; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

ein Untervektorraum von V. Für $V = \mathbb{R}^3$ sind dies alle zu $\mathbf{v}$ parallelen Vektoren.

3) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist

$$\operatorname{Ker} \mathbf{A} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

3.3 Definition. *Jede aus endlich vielen Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ gebildete Summe der Form*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

mit Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ heißt ***Linearkombination*** *der $\mathbf{v}_i$. Eine solche Linearkombination heißt trivial, wenn $\alpha_i = 0, i = 1, \ldots, k$, gilt. Die Menge aller Linearkombinationen der $\mathbf{v}_i$ heißt* ***lineare Hülle der*** *$\mathbf{v}_i$ und wird mit*

$$\operatorname{Lin}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i; \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k \right\}$$

bezeichnet.

3.4 Lemma. *Die lineare Hülle der Vektoren $\mathbf{v}_i \in V, i = 1, \ldots, k$, ist ein Unterraum von V.*

3.5 Definition. *Man sagt, ein Unterraum U von V wird von den Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$* ***erzeugt*** *oder auch, $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ist ein* ***Erzeugendensystem*** *von U, wenn*

$$U = \operatorname{Lin}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\ .$$

Beispiele:

1) $\mathbb{R}^n$ wird von $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ erzeugt, denn

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_n \mathbf{e}_n\ .$$

2) Der $\mathbb{R}^2$ wird von $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ erzeugt, aber auch $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ erzeugt $\mathbb{R}^2$. Dies entspricht einer Drehung des Koordinatensystems.

3.6 Definition.

a) Endlich viele Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ heißen ***linear abhängig****, wenn es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht sämtlich gleich Null sind, so, dass*

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

gilt.

b) Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ heißen ***linear unabhängig****, wenn sie nicht linear abhängig sind, d.h.*

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0\,.$$

- Um zu überprüfen, ob $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ linear unabhängig sind, muss man das lineare Gleichungssystem in $x_1, \dots, x_k$

$$x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{3.7}$$

betrachten (vergleiche (2.7)) und überprüfen, ob es nur triviale Lösungen gibt. Es gilt:

   i) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ (3.7) besitzt eine nichttriviale Lösung.

   ii) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ (3.7) besitzt nur triviale Lösung.

- Sonderfälle von (3.7)

   1) $k = 1:\quad \mathbf{v} \in V$ ist unlinear abhängig $\Leftrightarrow$ $(\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0)$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} \neq 0$.

   2) $k = 2: (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nicht beide gleich Null, mit

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{u} & = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v}, \qquad \text{falls } \alpha \neq 0, \\ \mathbf{v} & = -\frac{\alpha}{\beta}\mathbf{u}, \qquad \text{falls } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Falls $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ heißt dies, dass die Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ parallel sind.

3.8 Lemma. *Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen läßt.*

3.9 Lemma.

a) Jedes endliche System von Vektoren, das linear abhängige Vektoren enthält, ist linear abhängig.

b) Jedes endliche System von Vektoren, das den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

c) Jedes Teilsystem linear unabhängiger Vekotoren ist linear unabhängig.

3.10 Satz. *In einer Matrix in Stufenform sind die nichttrivialen Zeilenvektoren linear unabhängig.*

3.11 Satz. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $\mathbf{A}$ *ist invertierbar.*

b) Die Spalten von $\mathbf{A}$ *sind linear unabhängig.*

c) Die Zeilen von $\mathbf{A}$ *sind linear unabhängig.*

3.12 Satz. *Für Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w} \in V$ gilt:*

a) $\mathrm{Lin}\,(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}) = \mathrm{Lin}\,(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \Leftrightarrow \mathbf{w} \in \mathrm{Lin}\,(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$

b) Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Zur Erzeugung von $\mathrm{Lin}\,(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ *kann kein $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, k$, weggelassen werden. In diesem Fall nennt man $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ein **minimales Erzeugendensystem**.*