Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 30.04.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker II

SS 2001 — Blatt 1

Abgabe: **Montag, 07.05.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 3$):

(a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 \cdot x_2 = 0\}$,

(b) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 = 0\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_2 = 0\}$,

(c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 - 3x_2 + \pi x_3 = 0\}$,

(d) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 = a\}$ für festes $a \in \mathbb{R}$,

(e) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien W, U Unterräume.

(a) Zeigen Sie, dass auch $W \cap U$ ein Unterraum von V ist.

(b) Im allgemeinen ist $W \cup U$ kein Unterraum von V. Geben Sie konkrete Beispiele für V, W und U an, so dass $W \cup U$ kein Unterraum von V ist. Welche Unterraumeigenschaft wird nicht erfüllt? Berechnen Sie im Vergleich dazu $W \cap U$.

(c) Allgemeiner als (b) gilt: $W \cup U$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn $W \subset U$ oder $U \subset W$ gilt. Beweisen Sie dies.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Die Vektoren $(1, -3, 3, 4)^T$, $(2, 1, 0, 5)^T$ und $(1, -10, 9, 7)^T$ erzeugen eine Unterraum W von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Dimension von W. Geben Sie eine Basis von W an. Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis vom $\mathbb{R}^4$. Begründen Sie, wieso es sich dabei um eine Basis handelt.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Sei V der Vektorraum der Polynome von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner gleich 4. Seien $p(t) = t^3 - t^2 + 1$, $q(t) = t^3 + 3t - 2$, $r(t) = 2t^3 - 2t^2 + t - 1$ und $s(t) = 2t^3 - t^2 + t + 5$. Sei W der von p, q, r und s aufgespannte Unterraum von V. Geben Sie die Dimension von W an. Bestimmen Sie eine Basis von W, die aus Polynomen mit absteigendem Grad besteht.

Aufgabe 5 **(2 Punkte)**

Sei $X \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert durch

$$X := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ : \ A \text{ ist symmetrisch}\}.$$

Bestimmen Sie die Dimension von X und geben Sie ein Basis von X an.

Aufgabe 6 **(4 Punkte)**

Seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inversen A^{-1} und B^{-1}. (Beachten Sie, dass i kein Zählindex, sondern die komplexe Zahl $\sqrt{-1}$ ist.)

Hinweis:

Den aktuellen Aufgabenzettel und das aktuelle Kapitel des Kurzskripts finden Sie immer Montags nach der Vorlesung unter der folgenden Adresse:
`http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm2_SS01/`
Wem dies zu kompliziert zu merken ist, der kann diese Seite auch ausgehend von `http://www.mathematik.uni-freiburg.de` durch Klicken auf `Institut für Angewandte Mathematik`, dann `Lehre`, nun `Vorlesungsskripte/Übungsblätter` und anschließend auf `Mathematik für Ingenieure und Physiker II` erreichen.