Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 07.05.2001

**Mathematik für Ingenieure und Physiker II** [1]

SS 2001 — Blatt 2

Abgabe: **Montag, 14.05.2001** (vor der Vorlesung)

**Aufgabe 1** **(3 Punkte)**

Berechnen Sie die Determinanten von

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2** **(3 Punkte)**

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

für die rechten Seiten $(1,0,2)^T$, $(2,-1,2)^T$ und $(3,0,-1)^T$.

**Aufgabe 3** **(4 Punkte)**

Beweisen Sie mit Induktion über $n \geq 2$, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Dies ist die sogenannte *Vandermonde–Determinante*.

Hinweis: Versuchen Sie es mit Spaltenumformungen!

**Aufgabe 4** **(3 Punkte)**

Beweisen Sie für zwei Spaltenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\det(\mathbf{E} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = 1 + \mathbf{a}^T\mathbf{b}.$$

[1] `http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm2_SS01/`

**Aufgabe 5** **(4 Punkte)**

Sei $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 1+a^2 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1+a^2 & \text{für } i = j, \\ a & \text{für } i = j+1, \\ a & \text{für } i = j-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det(A)$ für beliebiges(!) $n$.

**Aufgabe 6** **(3 Punkte)**

Bringen Sie das folgende Gleichungssystem auf Stufenform und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right).$$