Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 14.05.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker II [1]

SS 2001 — Blatt 3

Abgabe: **Montag, 21.05.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die folgendermaßen definierte lineare Abbildung:

$$f : (x, y, z)^T \mapsto (x - y + z, -6y + 12z, -2x + 2y - 2z)^T.$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $M_S^S(f)$ und $M_B^B(f)$ von f bezüglich folgender Basen:

$$S = \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\},$$
$$B = \{(-1,0,1)^T, (-1,2,1)^T, (-2,0,4)^T\}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume von $\mathbf{A}$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Orthonormalisieren Sie mit Hilfe des Gram–Schmidt–Verfahrens das folgende System bzgl. des Standardskalarproduktes:

$$u_1 = (1,2,1)^T, \qquad u_2 = (2,1,1)^T, \qquad u_3 = (1,0,1)^T.$$

[1] http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm2_SS01/

Vorbereitung Aufgabe 4:

In der Vorlesung haben Sie das Standardskalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ auf dem $\mathbb{R}^n$ kennengelernt. Allgemein definiert man ein Skalarprodukt wie folgt:

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \;:\; V \times V \to \mathbb{R} \;:\; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

heißt Skalarprodukt, falls sie folgende Eigenschaften hat:

(a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(d) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{x} = 0$.

Wie für den $\mathbb{R}^n$ kann man nun definieren, wann zwei Vektoren orthogonal zueinander sind: Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ heißen orthogonal (bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$) genau dann, wenn $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ist.
Natürlich ist $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ auch mit dieser Definition ein Skalarprodukt. In der nachfolgenden Aufgabe werden wir ein weiteres Beispiel für ein allgemeines Skalarprodukt behandeln.

Aufgabe 4 **(5+3 Punkte)**

Sei $P([-1,1])$ der Raum der reellen Polynome auf dem Intervall $[-1,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \, dt$$

ein Skalarprodukt auf $P([-1,1])$ definiert.

(b) Machen Sie sich klar, dass das Gram–Schmidt–Verfahren zur Orthogonalisierung durch Ersetzen von $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ durch $\langle f, g \rangle$ wörtlich übernommen werden kann. Orthogonalisieren Sie nun die Polynome $1, x, x^2, x^3$ bzgl. des in (a) definierten Skalarprodukts.