Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 21.05.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker II [1]

SS 2001 — Blatt 4

Abgabe: **Montag, 28.05.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$. Weiterhin sei p ein beliebiges reelles Polynom vom Grad m. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar, so gilt: $\lambda \neq 0$ und $\frac{1}{\lambda}$ ist ein Eigenwert von $\mathbf{A}^{-1}$.

(b) $p(\lambda)$ ist ein Eigenwert von $p(\mathbf{A})$. ($p(\mathbf{A})$ bedeutet, dass man in das Polynom $p(\lambda)$ als Wert einfach die Matrix $\mathbf{A}$ einsetzt. Als Ergebnis erhält man wieder eine Matrix. Wäre z.B. $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, so wäre $p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$.)

(c) Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ähnlich zueinander, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$, so haben $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ das gleiche charakteristische Polynom.

(d) Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ähnlich zueinander, so auch $p(\mathbf{A})$ und $p(\mathbf{B})$.

(e) λ ist auch ein Eigenwert von $\mathbf{A}^T$.

(f) Ist $\mathbf{A}$ symmetrisch und positiv definit, d.h. für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0,$$

so sind alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ positiv.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Sei $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{\mathbf{A}}$ von $\mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ gilt. ($\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ bedeutet, dass man in das Polynom $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ wie in Aufgabe 1 als Wert $\mathbf{A}$ einsetzt. Das Ergebnis ist eine Matrix!)

(b) Sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) = \mathbf{0}$ gilt.

(c) Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$ gilt.
(Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 1 Teil d.) (Dies ist übrigens ein Spezialfall des Satzes von „Hamilton–Caley“, der besagt, dass die gleiche Aussage auch ohne Diagonalisierbarkeit gilt.)

[1] http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm2_SS01/

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Verwandeln Sie A durch Basiswechsel in eine Diagonalmatrix. Geben Sie die Basiswechselmatrix an.

(b) Berechnen Sie A^{2001}.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von $\mathbf{A}$. Begründen Sie, dass $\mathbf{A}$ nicht diagonalisierbar ist.

(b) Bringen Sie $\mathbf{A}$ durch Basiswechsel auf Jordangestalt. (Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1, λ_2. Diese bilden zwei der drei Spalten der Basiswechselmatrix. Um die dritte Spalte zu berechnen, suchen Sie sich den Eigenwert, dessen algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit ist. Sei dies $\tilde{\mathbf{v}}$ mit Eigenwert $\tilde{\lambda}$. Lösen Sie nun die Gleichung $(\tilde{\lambda}\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{v}}$. Die Lösung stellt den gesuchten fehlenden Spaltenvektor dar. Bringen Sie nun die drei Spalten der Basiswechselmatrix $\mathbf{B}$ in die richtige Reihenfolge. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Rechnung $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$.)

(c) Berechnen Sie A^{2001}. (Tipp: Zerlegen Sie die Jordanmatrix $\mathbf{J}$ aus Teil (a) in $\mathbf{D}+\mathbf{N}$, wobei $\mathbf{D}$ Diagonalgestallt hat und $\mathbf{N}$ die Einsen der Nebendiagonale enthält. Dann lässt sich $\mathbf{J}^{2001}$ mit Hilfe der Binomialformel

$$\mathbf{J}^{2001} = \sum_{j=0}^{2001} \binom{2001}{j} \mathbf{D}^{2001-j}\mathbf{N}^j.$$

leicht berechnen.)

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Sei $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ eine quadratische Form mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ein Hauptachsensystem von q, d.h. geben Sie eine Orthonormalbasis $\mathbf{B}$ an, so dass $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$ Diagonalgestalt hat.