Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 11.06.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker II [1]

SS 2001 — Blatt 6

Abgabe: **Montag, 18.06.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y)$ hat in Polarkoordinaten die Darstellung

$$F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^2 \sin(4\varphi).$$

(a) Berechnen Sie f_x und f_y für $(x,y) \neq (0,0)$, ausgedrückt in r, φ.

(b) Berechnen Sie die Extrema von f.

(c) Ist f stetig differenzierbar an der Stelle $(x,y) = (0,0)$?

(d) Ist f zweimal stetig differenzierbar an der Stelle $(x,y) = (0,0)$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto y^4 - 3xy^2 + x^3$.

(a) Berechnen Sie die lokalen und globalen Extremstellen und die Sattelpunkte von f.

(b) Sei Ω der Quader $\{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Parametrisieren Sie den Rand von Ω durch geeignete Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und γ_4. Maximieren Sie die Funktionen $f \circ \gamma_i$ für $i = 1, \ldots, 4$.

(c) Bestimmen Sie die Extremstellen von f auf Ω.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen nach der Taylorformel bis zur 2. Potenz von x, y und z:

$$(x,y,z) \mapsto z \exp(x^2 - y^2) \qquad \text{um den Punkt } (0,2,-1),$$

$$(x,y,z) \mapsto \frac{\sin(x) + y}{1 + z^2} \qquad \text{um den Punkt } (\pi,0,1).$$

[1] http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm2_SS01/

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R} : \quad (x,y) \mapsto 12y^5 - 20xy^3 + 5x^4.$$

Sei $\Omega := F^{-1}(0) = \{(x,y) : x > 0, y > 0, F(x,y) = 0\}$ die Niveaufläche von F zum Wert 0.

(a) Für welche Punkte $(x,y) \in \Omega$ lässt sich Ω in einer Umgebung von (x,y) durch eine implizite Funktion $y = g(x)$ darstellen? Berechnen Sie $g'(x)$ implizit (d.h. ausgedrückt in x und y).

(b) In welchen Punkten der Kurve gilt $g'(x) = 0$? Berechnen Sie für diese Punkte $g''(x)$.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Sie fahren mit Ihrem Fahrrad mit der Geschwindigkeit v und müssen auf Zuruf Ihre Freundin möglichst schnell bremsen. Nach mehreren Versuchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten ergeben sich folgende Bremswege W:

v [km/h]	5	8	10	13	14	23	25	33
W [m]	1,8	3	4	5,5	5,7	10	12	18

Aus diesen Daten können Sie nun angenähert Ihre Reaktionszeit r und Bremsbeschleunigung b berechnen. Wir gehen davon aus, dass Sie während Ihrer Reaktionszeit mit konstanter Geschwindigkeit weiterfahren und dann mit konstanter Beschleunigung abbremsen. Dadurch ergibt sich für den Bremsweg W die Formel:

$$W(v) = rv + \frac{v^2}{2b}.$$

Hierbei fällt auf, dass der Ausdruck $W(v)$ linear in r und $1/b$ ist. Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die „besten“ Werte für r und $1/b$.