Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 18.06.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker II [1]

SS 2001 — Blatt 7

Abgabe: **Montag, 25.06.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Bestimmen Sie die Extrema von

$$f\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\,:\,(x,y) \mapsto x^2 - xy + y^2 - x$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0$.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Mit der Methode des Langrange–Multipliers kann man auch Extremstellen unter mehreren Nebenbedingungen berechnen. Seien f, g und h gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &:= y^2 - 2xz, \\ g(x,y,z) &:= x^2 + y^2 - 1, \\ h(x,y,z) &:= x + z - 5. \end{aligned}$$

Dann sind die Extremstellen (x,y,z) von f unter den Nebenbedingungen $h = 0$ und $g = 0$ Lösungen der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} (\nabla f)(x,y,z) &= \lambda\,(\nabla g)(x,y,z) + \mu\,(\nabla h)(x,y,z), \\ g(x,y,z) &= 0, \\ h(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

mit zwei Lagrange–Multipliern γ und μ. Das heisst an der Extremstelle (x,y,z) ist der Gradient von f eine Linearkombination der Gradienten der Nebenbedingungen.
Bestimmen Sie wie beschrieben die Extremstellen von f unter den Nebenbedingungen $g = h = 0$.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Seien $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \exp(x_1 + x_2) \\ 1/x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$, $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ und $\mathcal{J}_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}$.

[1] http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm2_SS01/

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Gegeben ist die Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Jacobi–Matrix $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$. An welchen Punkten ist $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ invertierbar?

(ii) Bestimmen Sie die Fixpunkte von $\mathbf{f}$ und von $\mathbf{f} \circ \mathbf{f}$.