Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 25.06.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker II [1]

SS 2001 — Blatt 8

Abgabe: **Montag, 02.07.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die Gamma–Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Zeigen Sie:

(a) Das Integral in der Definition von Γ konvergiert und Γ ist stetig.

(b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

(c) $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Γ ist konvex.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die n-te Besselfunktion $J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt)\, dt.$$

Zeigen Sie:

(a) $J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$, für $x \neq 0$.
Tipp: Additionstheoreme vom Cosinus + Substitution

(b) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.
Tipp: Substitution $t = \pi - \tau$.

[1] http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm2_SS01/

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) := \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{e^{sx}}{x+s}\, ds.$$

Untersuchen Sie F auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Existiert $\lim_{x \to 0^+} F(x)$? Berechnen Sie $F'(1)$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Berechnen Sie die Länge und die geometrischen Mittelpunkte der Kurven:

(a) $\mathbf{w}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)^T$ für $0 \leq t \leq 1$.

(b) $\mathbf{w}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)^T$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ (Zykloide),

Der geometrische Mittelpunkt ist derjenige Punkt auf der Kurve, welcher die Kurve in zwei gleich lange Teile teilt.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Die Wege $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(t) &= (0,1)^T + t(1,1)^T, && 0 \leq t \leq 1, \\ \mathbf{w}_2(t) &= (t, t^2+1)^T, && 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

verbinden die Punkte $(0,1)$ und $(1,2)$. Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_{\mathbf{w}_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$, $i = 1, 2$, für die Vektorfelder

(a) $\mathbf{v}(x,y) = (x^2 - y, y^2 + x)^T$,

(b) $\mathbf{v}(x,y) = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3yx^2)^T$.

Berechnen Sie jeweils $(\nabla v) - (\nabla v)^T$.