Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 02.07.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker II [1]

SS 2001 — Blatt 9

Abgabe: **Montag, 09.07.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Für $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sei $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ definiert durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{1}{(x+y+z)^3} \begin{pmatrix} x+y-3z \\ ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von $\mathbf{v}$. Ist D einfach zusammenhängend?

(b) Für welche Werte von a, b, c, d, e, f hat $\mathbf{v}$ lokal ein Potential U?

(c) Wählen Sie ein maximales einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset D$ aus und berechnen Sie das Potential U auf G.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für $p \in \mathbb{R}$ sei $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := -\|\mathbf{x}\|^{p-2}\mathbf{x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{v}$ auf dem gesamten Definitionsbereich ein Potential U hat und berechnen Sie dies.

(b) Nehmen wir an, ein Massepunkt mit Masse $m > 0$ bewege sich auf einer periodischen, kreisförmigen Umlaufbahn γ mit Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω um den Nullpunkt im Potentialfeld $m\,U$. Bestimmen Sie ω in Abhängigkeit von R so, dass sich das Teilchen kräftefrei bewegt, d.h. die Kräfte der Bewegungsänderung nur auf Grund des Potentials hervorgerufen werden.

[1] `http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm2_SS01/`

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $\mathbf{v}$ die laminare Rohrströmung in einem zur y-Achse koaxialen Rohr vom Radius $r > 0$, d.h.

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 - x^2 - z^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$ für die folgenden Wege:

(a) $\mathbf{w} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3 \ : \ t \mapsto s(\cos(\omega\, t), 0, \sin(\omega\, t))^T$ mit $0 \leq s \leq r$ und $\omega > 0$.

(b) $\mathbf{w}$, der lineare Streckenzug von $(0,0,0)$ nach $(0,L,0)$ nach $(s,L,0)$ nach $(s,0,0)$ nach $(0,0,0)$, mit $L > 0$ und $0 \leq s \leq r$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Seien $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ zwei C^1-Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, so gilt in der Nabla–Schreibweise

$$\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}).$$

Wendet man die Regeln für das Spatprodukt an, so hätte man formal die Beziehung

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = -\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}),$$

d.h.

$$\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \quad \mathbf{g} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{f} \quad = -\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{g}.$$

Diese Formeln sind jedoch falsch. Geben Sie Gegenbeispiele $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ für die obigen formalen Formeln an. Wie muss die Formel für $\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g})$, ausgedrückt über die Rotation von $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$, richtig lauten?