Falls $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ heißt dies, dass die Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ parallel sind.

3.8 Lemma. *Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen läßt.*

3.9 Lemma.

a) Jedes endliche System von Vektoren, das linear abhängige Vektoren enthält, ist linear abhängig.

b) Jedes endliche System von Vektoren, das den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

c) Jedes Teilsystem linear unabhängiger Vekotoren ist linear unabhängig.

3.10 Satz. *In einer Matrix in Stufenform sind die nichttrivialen Zeilenvektoren linear unabhängig.*

3.11 Satz. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $\mathbf{A}$ *ist invertierbar.*

b) Die Spalten von $\mathbf{A}$ *sind linear unabhängig.*

c) Die Zeilen von $\mathbf{A}$ *sind linear unabhängig.*

3.12 Satz. *Für Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w} \in V$ gilt:*

a) $\mathrm{Lin}\,(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}) = \mathrm{Lin}\,(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \Leftrightarrow \mathbf{w} \in \mathrm{Lin}\,(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$

b) Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Zur Erzeugung von $\mathrm{Lin}\,(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ kann kein $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, k$, weggelassen werden. In diesem Fall nennt man $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ein ***minimales Erzeugendensystem****.*

3.13 Definition. *Ein System $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ von Vektoren aus V heißt eine* **Basis** *des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V, wenn gilt:*

(B.1) Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sind linear unabhängig,

(B.2) Die $\mathbf{v}_i$ erzeugen V, d.h. $\mathrm{Lin}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V$.

3.14 Satz. *Ist* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *eine Basis von* V*, dann gibt es zu jedem Vektor* $\mathbf{a} \in V$ *genau ein* n*-Tupel reeller Zahlen* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *mit*

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Ferner sind je m *Vektoren aus* V *linear abhängig, falls* $m > n$.

• Die Menge der Basisspaltenvektoren $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$ im Sinne obiger Definition.

3.15 Satz. *Die Zeilen (bzw. Spalten) einer invertierbaren* $n \times n$ *Matrix bilden eine Basis des* $\mathbb{R}_n$ *(bzw.* $\mathbb{R}^n$*).*

• Im Raum $P_k(\mathbb{R}) = \{\text{Polynome vom Grad } \leq k\}$ bilden die Polynome $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$ eine Basis.

3.16 Definition. *Ein Vektorraum* V *heißt* ***endlichdimensional****, wenn es endlich viele Vektoren* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ *mit* $V = \mathrm{Lin}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)$ *gibt.*

- Die Räume $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n, P_{\mathbb{R}}$ sind endlichdimensional.
- Der Raum $P(\mathbb{R}) = \{\text{Polynom mit beliebigem Grad}\}$ ist nicht endlichdimensional.

3.17 Satz (Basisergänzungssatz). *In einem endlichdimensionalen Vektorraum* $V \neq \{\mathbf{0}\}$ *bilden linear unabhängige Vektoren* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *bereits eine Basis* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *von* V *oder man kann sie durch Hinzunahme weiterer Vektoren* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l$ *zu einer Basis* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l)$ *von* V *ergänzen.*

3.18 Satz. *Jeder endlichdimensionale Vektorraum* $V \neq \{\mathbf{0}\}$ *besitzt eine endliche Basis* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$*. Ist* $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ *ebenfalls eine Basis von* V*, so gilt:* $m = n$*.*

3.19 Definition. *Die gemeinsame Länge* n *aller Basen eines endlichdimensionalen Vektorraumes* $V \neq \{\mathbf{0}\}$ *heißt* ***Dimension*** *von* V*, abgekürzt* $\dim V = n$*. Man setzt* $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Beispiele:

$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}_n = n,$
$\dim P_k(\mathbb{R}) = k + 1,,$
$\dim\{x \in \mathbb{R}^3, 3x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = 2\,.$ (zwei Parameter frei wählbar)

3.20 Lemma. *Ist r die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, dann gilt:*

$$r = \dim \operatorname{Lin}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k).$$

3.21 Satz. *In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Dimension n gilt:*

a) Je n linear unabhängige Vektoren aus V bilden eine Basis von V.

b) Jedes Erzeugendensystem von V mit n Elementen ist eine Basis von V.

c) Je $n+1$ Vektoren aus V sind linear abhängig.

3.22 Satz. *Jeder Unterraum U eines endlichdimensionalen Vektorraumes V ist endlichdimensional. Im Falle $U \neq V$ gilt:* $\dim U < \dim V$.

• Nach Satz 3.22 ist ein Unterraum U eines endlichdimensionalen Vektorraumes wieder ein endlichdimensionaler Vektorraum. Also gelten die Sätze 3.17, 3.18, 3.21 analog für U.
• Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Dann ist $\operatorname{Ker} \mathbf{A} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $r < n$.

6.4 Elementarmatrizen

4.1 Definition. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit den Zeilenvektoren $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m \in \mathbb{R}_n$ und den Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Dann heißt*

$$\operatorname{Lin}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) \subseteq \mathbb{R}_n$$

*der **Zeilenraum** von $\mathbf{A}$ und*

$$\operatorname{Lin}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$$

*der **Spaltenraum** von $\mathbf{A}$.*

- *Nach Lemma 3.20 ist die Dimension des Spaltenraumes die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$. Analog für den Zeilenraum.*

- *Beim Transponieren gehen Zeilen in Spalten über und umgekehrt. Also spiegeln sich die Eigenschaften des Spaltenraumes (Zeilenraumes) von $\mathbf{A}$ wieder im Zeilenraum (Spaltenraum) von $\mathbf{A}^T$.*

- *Aus* $\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i \,, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbf{yA} = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{a}_j, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_m$ *folgt*

$$\begin{aligned} \textit{Spaltenraum von } \mathbf{A} &= \{\mathbf{Ax}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}, \\ \textit{Zeilenraum von } \mathbf{A} &= \{\mathbf{yA}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_m\} = \{\mathbf{y}^T\mathbf{A}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.3 Satz. *Sei* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Für alle invertierbaren Matrizen* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *und* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *gilt:*
$\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{AQ}$ *haben denselben Spaltenraum,* $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{PA}$ *denselben Zeilenraum.*

- Elementare Zeilen- bzw. Spaltenumformungen werden in folgende Typen eingeteilt:

Typ 1: Vertauschen zweier Zeilen (Spalten),

Typ 2: Multiplizieren einer Zeile (Spalte) mit Faktor ungleich Null,

Typ 3: Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen.

4.4 Definition. *Eine $m \times m$ Matrix $\tilde{\mathbf{E}}$ heißt* ***Elementarmatrix vom Typ*** *i, i=1,2,3, wenn sie aus der $m \times m$ Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ durch* ***eine*** *elementare Zeilenumformung vom Typ i hervorgeht.*

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Vertauschen von } \mathbf{e}_1 \text{ und } \mathbf{e}_2 \Rightarrow \text{Typ 1}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \alpha\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Multiplikation von } \mathbf{e}_2 \text{ mit } \alpha \Rightarrow \text{Typ 2}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des } \alpha \text{ fachen von } \mathbf{e}_3 \text{ zu } \mathbf{e}_1 \Rightarrow \text{Typ 3}$$

4.5 Satz.

a) *Entsteht* $\tilde{\mathbf{A}}$ *aus* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *durch* *<u>eine</u>* *elementare Zeilenumformung, dann gilt:*

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{A}$$

mit der zugehörigen Elementarmatrix $\tilde{\mathbf{E}}$.

b) *Die Elementarmatrizen sind invertierbar, die Inversen sind ebenfalls Elementarmatrizen.*

c) *Entsteht* $\mathbf{M}$ *bzw.* $\mathbf{N}$ *aus* $\mathbf{A} \in \mathbf{E}^{m\times n}$ *durch endlich viele elementare Zeilen- bzw. Spaltenumformungen, dann gibt es invertierbare Matrizen* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$\mathbf{M} = \mathbf{PA}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{AQ}. \tag{4.6}$$

$\mathbf{P}$ *und* $\mathbf{Q}$ *sind Produkte von Elementarmatrizen.*

4.7 Folgerung. *Der Zeilenraum einer Matrix ändert sich nicht bei elementaren Zeilenumformungen, der Spaltenraum nicht bei elementaren Spaltenumformungen.*

4.8 Folgerung. *In einer Matrix in Stufenform bilden die nichttrivialen Zeilenvektoren eine Basis des Zeilenraumes. Die Dimension des Zeilenraumes ist die Anzahl der Elemente der Buchführungsmenge.*

- Man kann statt Zeilenumformungen auch Spaltenumformungen durchführen und erhält so die sogenannte „Spaltenstufenform", z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.9 Folgerung. *In einer Matrix in „Spaltenstufenform" bilden die nichttrivialen Spaltenvektoren eine Basis des Spaltenraumes. Die Dimension ist die Anzahl der Elemente der Buchführungsmenge.*

- Wir bezeichnen mit
$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$
die Matrix die an den ersten s Diagonalstellen eine 1 und sonst nur Nullen hat.

4.10 Satz.

a) Die Dimension des Spaltenraumes von $\mathbf{A}$ *ist gleich der Dimension des Zeilenraumes von* $\mathbf{A}$.

b) Es gibt invertierbare Matrizen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *so dass*
$$\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$
wobei $r = \dim$ *(Zeilenraumes von* $\mathbf{A}$*)*

c) Gilt für invertierbare Matrizen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *und* $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Beziehung* $\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *dann ist* $s = r$ *und* $(\mathbf{q}_{r+1}, \dots, \mathbf{q}_n)$ *bilden eine Basis von Kern* $\mathbf{A}$.

4.12 Definition. *Der* ***Rang*** *einer Matrix ist die Dimension ihres Zeilenraumes und wird mit Rang* $\mathbf{A}$ *bezeichnet.*

4.13 Folgerung. *Für jede* $m \times n$ *Matrix* $\mathbf{A}$ *gilt:*
$$\mathrm{Rang}\mathbf{A} + \dim(\mathrm{Ker}\ \mathbf{A}) = n.$$

4.14 Folgerung. *Für* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *gilt:*
$$\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A}^T), \tag{i}$$
und für alle invertierbaren Matrizen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$$\mathrm{Rang}\,(\mathbf{PAQ}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A}). \tag{ii}$$

4.15 Blockmatrizen. *Aus Matrizen* $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *und* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) \in \mathbb{R}^{m\times k}$ *gleicher Zeilenzahl kann man eine neue Matrix*
$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) \in \mathbb{R}^{m\times(n+k)}$$

bilden. Analog ist für Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ *gleicher Spaltenzahl eine Matrix* $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}$ *definiert. Wiederholtes Anwenden solcher Zusammensetzungen liefert eine* ***Blockmatrix***

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{l1} & \cdots & \mathbf{A}_{lk} \end{pmatrix},$$

wobei nebeneinanderstehende Matrizen dieselbe Zeilenzahl haben und untereinanderstehende dieselbe Spaltenzahl. Umgekehrt kann man eine Matrix $\mathbf{A}$ *auch in Blöcke zerlegen, z.B.:*

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \hline \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{array}\right)$$

4.16 Rechenverfahren mit Zeilenumformungen. *Aus* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ *bildet man* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{m\times(n+k)}$. *An dieser Matrix werden elementare Zeilenumformungen durchgeführt bis man zu einer Matrix* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *kommt, d.h.*

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\downarrow \textit{Zeilenumformungen}} \\ \hline \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{array}$$

Nach Satz 4.5c) gibt es eine Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *mit*

$$\mathbf{M} = \mathbf{PA}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{PB} \tag{4.17}$$

(*i*) *Wählt man nun* $\mathbf{B} = \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, *so liefert* (4.17)

$$\mathbf{E} = \mathbf{PA}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{P},$$

d.h. man kann die Matrix $\mathbf{P}$ *berechnen die* $\mathbf{A}$ *in* $\mathbf{M}$ *überführt.*

(*ii*) *Falls* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbar ist und man* $\mathbf{B} = \mathbf{M} = \mathbf{E}_n$ *wählt, liefert* (4.17)

$$\mathbf{E} = \mathbf{PA}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{P},$$

d.h. $\mathbf{P} = \mathbf{N} = \mathbf{A}^{-1}$. *Insbesondere ist nach Satz 4.5c)* $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$ *ein Produkt aus Elementarmatrizen.*

(*iii*) *Soll das Gleichungssystem* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *für mehrere rechte Seiten* $\mathbf{b}_i, i = 1, \ldots, k$ *gelöst werden, so wählt man* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k), \mathbf{M} = \mathbf{E}$. *Also liefert* (4.17)

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

d.h. die Spalten $\mathbf{b}_i$ *von* $\mathbf{N}$ *sind die Lösungen der Gleichungen* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$.

(*iv*) *Sei* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbar und sei* $\mathbf{B} = \mathbf{E}$. *Wenn man* $\mathbf{A}$ *nur mit Hilfe von Zeilenumformungen vom Typ 3 in eine obere Dreiecksmatrix* $\mathbf{M}$ *überführt (Ausräumen der Spalten unterhalb der Diagonalen), so treten auf der rechten Seite des Schemas nur Veränderungen unterhalb der Diagonalen auf, d.h.* $\mathbf{P}$ *ist eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Aus* (4.17) *folgt:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}, \tag{4.18}$$

wobei auch $\mathbf{P}^{-1}$ *eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen ist. Die multiplikative Zerlegung* (4.18) *mit* $\mathbf{L} := \mathbf{P}^{-1}$ *und* $\mathbf{R} := \mathbf{M}$ *heißt* **L-R-*Zerlegung***.