(*iii*) *Soll das Gleichungssystem* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *für mehrere rechte Seiten* $\mathbf{b}_i, i = 1, \dots, k$ *gelöst werden, so wählt man* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k), \mathbf{M} = \mathbf{E}$. *Also liefert* (4.17)

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

d.h. die Spalten $\mathbf{b}_i$ *von* $\mathbf{N}$ *sind die Lösungen der Gleichungen* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$.

(*iv*) *Sei* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbar und sei* $\mathbf{B} = \mathbf{E}$. *Wenn man* $\mathbf{A}$ *nur mit Hilfe von Zeilenumformungen vom Typ 3 in eine obere Dreiecksmatrix* $\mathbf{M}$ *überführt (Ausräumen der Spalten unterhalb der Diagonalen), so treten auf der rechten Seite des Schemas nur Veränderungen unterhalb der Diagonalen auf, d.h.* $\mathbf{P}$ *ist eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Aus* (4.17) *folgt:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}, \tag{4.18}$$

wobei auch $\mathbf{P}^{-1}$ *eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen ist. Die multiplikative Zerlegung* (4.18) *mit* $\mathbf{L} := \mathbf{P}^{-1}$ *und* $\mathbf{R} := \mathbf{M}$ *heißt* **L-R-*Zerlegung***.

Beispiel:

	A			**E**				Protokoll
	1	2	3	1	0	0		
	2	1	0	0	1	0		
	1	0	2	0	0	1		
	1	2	3	1	0	0		
	0	-2	-6	-2	1	0		$\mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_1$
	0	-2	-1	-1	0	1		$\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1$
	1	2	3	1	0	0		
$\mathbf{M} =$	0	-3	-6	-2	1	0	$= \mathbf{P}$	
	0	0	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1		$\mathbf{z}_3 - \frac{2}{3}\mathbf{z}_2$
	1	2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1		$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3$
	0	1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}(\mathbf{z}_2 + 2\mathbf{z}_3)$
	0	0	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}\mathbf{z}_3$
	1	0	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$		$\mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_2$
	0	1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$		
	0	0	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$		

Also sind die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ und die L-R-Zerlegung, gegeben durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Spalten von $\mathbf{A}^{-1}$ sind Lösungen von $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i \quad i = 1, 2, 3$.

4.19 Rechenverfahren mit Spaltenumformungen. *Aus* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k\times n}$ *bilden wir* $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}$ *und führen an dieser Matrix Spaltenumformungen durch. Wir erhalten eine Matrix* $\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$, *d.h.*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \textit{Spaltenumformungen} \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

Nach Satz 4.5c) existiert eine Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{C}\mathbf{Q} = \mathbf{N}.$$

(*i*) *Die Transformationsmatrix* $\mathbf{Q}$ *errechnet sich durch die Wahl* $\mathbf{C} = \mathbf{E}$.

(*ii*) *Eine Basis des Lösungsraumes* $\operatorname{Ker}(\mathbf{A})$ *des homogenen Gleichungssystems* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *errechnet sich durch die Wahl* $\mathbf{C} = \mathbf{E}$ *und* $\mathbf{N}$ *als Spaltenstufenform. Somit haben wir*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

und Satz 4.9c) liefert, dass $\mathbf{q}_{r+1}, \ldots, \mathbf{q}_n$ *eine Basis von* $\operatorname{Ker}(\mathbf{A})$ *ist.*

Beispiel:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6 \\
5 & 9 & 12 \\
 & & \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
4 & -3 & -6 \\
6 & -3 & -6 \\
 & & \\
1 & -2 & -3 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
4 & -3 & 0 \\
6 & -3 & 0 \\
 & & \\
1 & -2 & 1 \\
0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 1
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 \\
 & & \\
-\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\
\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -2 \\
0 & 0 & 1
\end{array}
$$

d.h. $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A} = 1$ und $(1, -2, 1)^T$ ist eine Basis von $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$.

4.20 Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems. *Die erweiterte Koeffizientenmatrix* $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ *wird durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform* $(\mathbf{M}|\mathbf{d})$ *gebracht. Danach bestimmt man eine Basis von* $\operatorname{Ker}(\mathbf{A})$ *mit Hilfe des Verfahrens aus 4.19 (ii). Sei* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-r}$ *diese Basis und sei* $\mathbf{v}_0$ *die spezielle Lösung des inhomogenen Systems, d.h. alle freien Parameter werden zu Null gesetzt. Dann ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystems* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *gegeben durch*

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-r} \mathbf{u}_{n-r} \quad , \lambda_i \in \mathbb{R} \textit{ beliebig.}$$

Beispiel:

$$
\begin{array}{rcccc|c}
 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\
 & 2 & 2 & -3 & 4 & 1 \\
 & 4 & -2 & -1 & 2 & 5 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\
\rightarrow & 0 & 1 & -5 & 6 & -3 \\
 & 0 & 6 & -5 & 6 & -3 \\
\hline
 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -1 & 1 \\
\rightarrow & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 1 & -\frac{1}{2} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Also ist die allgemeine Lösung $\mathbf{v}$ des obigen Systems gegeben durch

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ beliebig},$$

wobei sich die Basisvektoren von $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ auf Grund der Struktur der Stufenform sofort ohne Rechnung als

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, 0\right)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1)^T$$

ablesen lassen. ■

6.5 Determinanten

5.1 Zweireihige Determinanten. *Das von zwei Vektoren* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *der* (x, y)*-Ebene erzeugte Parallelogram hat den Flächeninhalt (siehe Kapitel 1, 5.15)*

$$F = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \, .$$

Die Zahl

$$\det \mathbf{A} := a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{5.2}$$

heißt ***Determinante*** *der Matrix* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$*. Man berechnet sie nach dem Schema*

$$\det \begin{pmatrix} \overset{+}{a_1} & & b_1 \\ & \nwarrow\!\!\!\!\searrow\!\!\!\!\nearrow & \\ \underset{-}{a_2} & & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

und es gilt $\det \mathbf{A} = \pm F$*. Also haben wir:*

$$\det \mathbf{A} = \pm F = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} \textit{ parallel oder } (\mathbf{a} = \mathbf{0} \textit{ oder } \mathbf{b} = \mathbf{0}) \, ,$$

anders gesagt

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} \textit{ sind linear abhängig} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A} \textit{ ist nicht invertierbar.} \end{aligned}$$

5.3 Dreireihige Determinanten. *Der Spat dreier Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *hat das Volumen (Kapitel 1, Satz 5.24)*

$$\begin{aligned} V &= |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| \\ &= |a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)| \end{aligned}$$

Die Zahl

$$\det \mathbf{A} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

ist die ***Determinante*** *der Matrix* $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$. *Das Volumen des Spats ist Null, wenn er entartet ist, und somit sind die Vektoren linear abhängig sind, d.h.*

$$\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ linear ahängig}$$

oder anders gesagt

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} \neq 0 &\Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ linear unabhängig,} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ invertierbar,} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Rang} \mathbf{A} = 3. \end{aligned}$$

Auf Grund der Definition des Spatproduktes hat man für $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

d.h. die Berechnung einer Determinante einer 3×3 *Matrix kann auf die Berechnung von Determinanten von* 2×2 *Matrizen zurückgeführt werden.*

5.5 Definition. *Sei* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Wir definieren die* ***Determinante*** $\det \mathbf{A}$ *rekursiv durch.*

$n = 1:$ $\det \mathbf{A} := a_{ij}$

$n \geq 2:$ $\det \mathbf{A} := a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{21} \det \mathbf{A}_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det \mathbf{A}_{n1}$,
wobei $\mathbf{A}_{i1}$ *die* $(n-1) \times (n-1)$ *Matrix ist, die aus* $\mathbf{A}$ *durch Entfernen der 1. Spalte und der* i*-ten Zeile entsteht.*

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix} - 3\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 6 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&+0\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}\\ &= -2\,(3\cdot 1-2\cdot 3)-6\,(1\cdot 1-0\cdot 3)+4\,(1\cdot 2-0\cdot 3)\\ &\quad -3[2\,(3\cdot 1-2\cdot 3)-6\,(0\cdot 1-1\cdot 3)+4\,(0\cdot 2-1\cdot 3)]\\ &\quad -2[2\,(1\cdot 2-0\cdot 3)+2\,(0\cdot 2-1\cdot 3)+6\,(0\cdot 0-1\cdot 1)]\\ &= -46\end{aligned}$$

- Wenn man die rekursive Definition 5.5 vollständig entwickelt erhält man:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=i_1,\dots,i_n} (-1)^{\varepsilon(i)} a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdot\dots\cdot a_{i_n n}, \tag{5.6}$$

wobei man über alle Permutationen i der Menge $\{1,2,\dots,n\}$ summiert und $\varepsilon(i)$ die Anzahl der Vertauschungen ist, die man benötigt um i in $\{1,2,\dots,n\}$ zu bringen. Man benötigt also $n!$ Summanden!

5.7 Satz. *Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *ist das Produkt seiner Diagonalelemente* a_{ii}, *d.h.*

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Insbesondere gilt: $\det \mathbf{E} = 1, \det(\alpha\mathbf{E}) = \alpha^n$.

5.8 Satz. *a)* det *ist* ***linear in jeder Zeile***, *d.h.*

$$\det\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ \alpha z_i\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} = \alpha\det\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_i\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ a+b\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ a\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}.$$

b) det *ist* ***alternierend***, *d.h.*

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

insbesondere ist $\det \mathbf{A} = 0$ *falls zwei Zeilen von* $\mathbf{A}$ *identisch sind.*

5.9 Satz. *Seien* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Entsteht $\tilde{\mathbf{A}}$ *aus* $\mathbf{A}$ *durch eine elementare Zeilen- bzw. Spaltenumformung vom Typ i, dann gilt:*

$$\begin{aligned} &\textit{Typ 1:} && \det \tilde{\mathbf{A}} = -\det \mathbf{A}, \\ &\textit{Typ 2:} && \det \tilde{\mathbf{A}} = \alpha \det \mathbf{A} \qquad \alpha \neq 0, \\ &\textit{Typ 3:} && \det \tilde{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

b) Es gilt:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T,$$

insbesondere gilt Satz 5.8 auch für Spalten.

c) Es gilt:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}\,. \tag{5.11}$$

d) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \textit{ invertierbar} &\Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0, \\ \operatorname{Rang} \mathbf{A} < n &\Leftrightarrow \det \mathbf{A} = 0. \end{aligned}$$

5.12 Folgerung. *Es gelten für* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

a) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$, *b)* $\det(\mathbf{A}^k) = (\det \mathbf{A})^k, \quad k \in \mathbb{N}$,

c) $\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$, *falls* $\mathbf{A}$ *invertierbar,*

d) $\det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A}$, *falls* $\mathbf{B}$ *invertierbar,*

e) falls $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ *oder* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ *mit Blockmatrizen* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, *so gilt:*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{D}.$$

5.13. *Die Matrix* $\tilde{\mathbf{A}} = \big(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n\big)$ *geht aus* $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *durch* $(j-1)$ *sukzessive Vertauschungen von Spalten hervor. Also gilt*

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = (-1)^{j-1} \det \mathbf{A}.$$

Entwickelt man $\det \tilde{\mathbf{A}}$ *nach Definition 5.5 erhält man die* ***Entwicklung von*** $\det \mathbf{A}$ ***nach der*** j***-ten Spalte***

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij},$$

wobei $\mathbf{A}_{ij}$ *die* $(n-1)\times(n-1)$ *Matrix ist, die aus* $\mathbf{A}$ *durch Wegstreichen der* i*-ten Zeile und der* j*-ten Spalte entsteht. Durch Transposition erhält man die* ***Entwicklung von*** $\det \mathbf{A}$ ***nach der*** i***-ten Zeile***

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij}.$$

Bei der Berechnung von $\det \mathbf{A}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \geq 3$ *sollte man die Struktur der Matrix beachten (evtl. Blockmatrix) und durch Zeilen- und Spaltenumformungen möglichst viele Nullen erzeugen.*

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -10 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\
&= -10 \cdot (-1) = 10
\end{aligned}
$$

- **Cramersche Regel:**
  Sei $\mathbf{A}$ invertierbar. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, Dann hat das System die Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ mit

$$x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \,.$$

6.6 Lineare Abbildungen und Eigenwerte

Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Mit einer **Abbildung** $f : V \to W$ wird jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ ein eindeutig bestimmter Vektor $\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \in W$ zugeordnet.

6.1 Definition. *Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear**, wenn gilt:*

(L1) f ist homogen, d.h. $f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in V$,

(L2) f ist additiv, d.h. $f(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

- *(L1),(L2) ist äquivalent zu*

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_n f(\mathbf{v}_n) \\
\forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_i \in V
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$