Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix}1&3&-5&1&4\\4&2&2&0&3\\0&0&1&2&3\\0&0&0&4&5\\0&0&-1&3&3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\-1&3&3\end{pmatrix}$$

$$= -10\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&5&6\end{pmatrix}$$

$$= -10\cdot(-1) = 10$$

- **Cramersche Regel:**
  Sei $\mathbf{A}$ invertierbar. Dann hat das System $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ die Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ mit

$$x_i = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)\,.$$

6.6 Lineare Abbildungen und Eigenwerte

Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Eine **Abbildung** $f : V \to W$ ordnet jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ einen eindeutig bestimmten Vektor $\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \in W$ zu.

6.1 Definition. *Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt* ***linear****, wenn gilt:*

(L1) f ist homogen, d.h. $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in V$,

(L2) f ist additiv, d.h. $f(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

- *(L1),(L2) sind äquivalent zu*

$$f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_n f(\mathbf{v}_n) \qquad \forall\alpha_i \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_i \in V\,. \tag{6.2}$$

Beispiele:

- Die Multiplikation mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liefert die lineare Abbildung $\ell_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \to \mathbf{Ax}$ (siehe Satz 2.9)

- Der Differentialoperator $\frac{d}{dx} : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) : f \mapsto f'$ ist linear (siehe Kapitel 3, Satz 1.8).

- Das Integral $I : R([a,b]) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int\limits_a^b f(x)\,dx$, wobei $R([a,b])$ die Riemann integrierbaren Funktionen über $[a,b]$ sind, ist linear. (siehe Kapitel 4 Satz 1.6)

6.3 Operationen mit linearen Abbildungen. *Seien $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren punktweise die Abbildungen*

$$f + g : V \to W, \qquad \alpha f : V \to W\,,$$

d.h.

$$\begin{aligned} (f+g)\,(v) &:= f(v) + g(v), \\ (\alpha f)\,(v) &:= \alpha f(v). \end{aligned}$$

Mit diesen Operationen ist die Menge der ***Homomorphismen***

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \{f : V \to W \ \textit{linear}\}$$

wieder ein Vektorraum. Weiterhin ist auch die ***Komposition*** *zweier linearer Abbildungen wieder linear, d.h. für $f : V \to W$ und $g : U \to V$ ist auch*

$$f \circ g : U \to W \quad (f \circ g)\,(v) := f\,(g(v))$$

linear. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von V. Nach Satz 3.14 existiert für jeden Vektor $\mathbf{v} \in V$ genau ein Vektor $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$. Die Abbildung

$$k_B : V \to \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{a}$$

heißt ***Koordinatenabbildung bezüglich der Basis*** $\mathbf{B}$. *Sie ist linear und mit ihr überträgt man Rechnungen im V in Rechnungen im $\mathbb{R}^n$ und umgekehrt.*

6.4 Satz. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann gilt für die Matrix $\mathbf{M}(f) := (f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, deren Spalten die Bilder der Standardbasisvektoren sind, folgende Beziehung:*

$$\mathbf{M}(f)\mathbf{x} = f(\mathbf{x})\,.$$

*Man nennt $\mathbf{M}\left(f\right)$ die **Abbildungsmatrix** von f bezüglich der Standardbasis.*

6.5 Lemma. *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei lineare Abbildungen mit Abbildungsmatrizen $\mathbf{M}\left(f\right), \mathbf{M}\left(g\right)$. Dann gilt:*

(i) $\mathbf{M}\left(\alpha f\right) = \alpha \mathbf{M}\left(f\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathbf{M}\left(f + g\right) = \mathbf{M}\left(f\right) + \mathbf{M}\left(g\right)$

(iii) $\mathbf{M}\left(f \circ g\right) = \mathbf{M}\left(f\right) \cdot \mathbf{M}\left(g\right)$

*Ist f **invertierbar**, d.h. zu jedem $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, so wird die inverse Abbildung mit f^{-1} bezeichnet und es gilt:*

(iv) $\mathbf{M}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathbf{M}\left(f\right)\right)^{-1}$

6.6 Änderung des Volumens. *Seien $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ n Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Ein n-**Spat** ist die Menge aller Linearkombinationen*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i \qquad 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \ldots, n.$$

In Analogie zum $\mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit

$$V = \left|\det\left(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\right)\right|$$

das Volumen des von $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ aufgespannten n-Spats. Wegen

$$\begin{aligned}
\det\left(f(\mathbf{b}_1), \ldots, f(\mathbf{b}_n)\right) &= \det\left(\mathbf{M}\left(f\right)\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{M}\left(f\right)\mathbf{b}_n\right) \\
&= \det\left(\mathbf{M}\left(f\right) \ lr\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\right) \\
&= \det \mathbf{M}\left(f\right) \det\left(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\right)
\end{aligned}$$

gibt $\left|\det\left(\mathbf{M}\left(f\right)\right)\right|$ die Volumenverzerrung der linearen Abbildung an.

6.7 Definition. *Seien* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T, \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ *Vektoren des* $\mathbb{R}^n$. *Die Zahl*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

heißt ***Skalarprodukt*** *von* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$, *und*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

heißt ***Länge*** *des Vektors* $\mathbf{x}$. *Ein Vektor* $\mathbf{x}$ *heißt* ***Einheitsvektor***, *wenn* $\|\mathbf{x}\| = 1$.

6.8 Lemma. *Für alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:*

i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

ii) $\alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}(\alpha \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{y}(\alpha \cdot \mathbf{x})$

iii) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

iv) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ *für alle* $\mathbf{x} > 0$

v) $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$

vi) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$

vii) $\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$ *(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)*

viii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(Dreiecksungleichung)*

6.9 Definition. *Für* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ *nennt man* $\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \varphi = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$,*den* ***Winkel*** *zwischen* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$. *Man nennt* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ***orthogonal*** *falls* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, *d.h.* $\varphi = \frac{\pi}{2}$. *Der Nullvektor* $\mathbf{0}$ *steht orthogonal zu allen Vektoren des* $\mathbb{R}^n$.

6.10 Definition.

a) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *heisst* ***orthogonal***, *wenn sie das Skalarprodukt invariant lässt, d.h. es gilt*

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

b) Eine Matrix heißt ***orthogonal****, wenn gilt:*

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}, \ \textit{d.h.} \ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T.$$

c) Eine Basis $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *heißt* ***orthogonal****, wenn die Vektoren* $\mathbf{b}_i$ *paarweise senkrecht aufeinander stehen, d.h.*

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0 \qquad i \neq j = 1, \ldots, n.$$

Die Basis heißt ***orthonormal****, wenn sie orthogonal ist und aus Einheisvektoren besteht, d.h.*

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

6.11 Satz. *Sei* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Dann sind äquivalent:*
(i) $\mathbf{A}$ *ist orthogonal,*
(ii) $(\mathbf{A}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
(iii) Die Spalten von $\mathbf{A}$ *sind eine Orthonormalbasis des* $\mathbb{R}^n$.
Insbesondere ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *orthogonal genau dann, wenn* $\mathbf{M}(f) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *orthogonal ist.*

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow$ Zeilen sind Orthonormalbasis.
- Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal. Dann ist f
  - i) **Volumentreu**, d.h. $|\det \mathbf{M}(f)| = 1$,
  - ii) **längentreu**, d.h. $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$,
  - iii) **winkeltreu**, d.h. $\measuredangle(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

6.12 Spiegelungen im $\mathbb{R}^3$. *Eine Punktspiegelung ist durch die Vorschrift*

$$s : \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$$

gegeben. Es gilt $\mathbf{M}(s) = -\mathbf{E}$.
Sei $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ *ein Einheitsvektor. Durch die Gleichung* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$ *wird eine zu* $\mathbf{a}$ *orthogonale Ebene aufgespannt. Die Spiegelung an dieser Ebene ist gegeben durch*

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a}.$$

Man rechnet sofort aus, dass

$$s(\mathbf{x}) \cdot s(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$
$$s(s(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

und daher gilt (siehe Satz 6.11 und Lemma 6.5)

$$\mathbf{M}\,(s) = \mathbf{M}\,(s)^{-1} = \mathbf{M}\,(s)^{T}\,,$$

d.h. die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}\,(s)$ *ist eine symmetrische, orthogonale Matrix mit* $\det(\mathbf{M}\,(s)) = -1$*, für die gilt:*

$$\mathbf{M}\,(s) = \mathbf{E} - 2\mathbf{a}\mathbf{a}^{T}\,.$$

6.13 Drehungen im Raum. *Eine Drehung um eine Koordinatenachse lässt stets eine Komponenete unverändert und transformiert die beiden anderen Komponenten entsprechend der Formel für die Drehung einer Ebene (Kapitel 1, Satz 3.10). Somit erhält man z.B. für die Drehung um die* z*-Achse die Abbildungsmatrix*

$$\mathbf{M}\,(\mathbf{D}_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen sei $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *ein Richtungsvektor und* $\varphi \geq 0$ *ein Drehwinkel, dann ist die entsprechende Drehung gegeben durch:*

$$d(\mathbf{x}) = (\cos\varphi)\,\mathbf{x} + (1 - \cos\varphi)\,\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} + \frac{\sin\varphi}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} \times \mathbf{x}$$

Man kann zeigen, dass $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *die Abbildungsmatrix einer Drehung ist genau dann, wenn*

$$\mathbf{D}^{T} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E} \text{ und } \det \mathbf{D} = 1.$$

6.14 Das Gram-Schmidtsche Orthonomierungsverfahren.
Seien $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n, (k \leq n)$*, linear unabhängige Vektoren. Man berechnet eine Orthonormalbasis* $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ *der linearen Hülle* $\mathrm{Lin}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k)$ *wie folgt:*

- *Setze* $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_1\|}\mathbf{b}_1$.

- *Berechne die zu* $\mathbf{c}_1$ *orthogonale Komponente* $\mathbf{c}_2'$ *von* $\mathbf{b}_2$*, d.h.*

$$\mathbf{c}_2' = \mathbf{b}_2 - (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 \,.$$

- *Normiere* $\mathbf{c}_2'$ *und setzte* $\mathbf{c}_2 := \frac{1}{\|\mathbf{c}_2'\|}\mathbf{c}_2'$.

- *Berechne die zu* $\mathbf{c}_1$ *und* $\mathbf{c}_2$ *orthogonale Komponente* $\mathbf{c}_3'$ *von* $\mathbf{b}_3$*, d.h.*

$$\mathbf{c}_3' = \mathbf{b}_3 - (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 - (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{c}_2)\mathbf{c}_2 \,,$$

  und normiere $\mathbf{c}_3'$*, d.h. setze*

$$\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{c}_3'\|}\mathbf{c}_3' \,,$$

  usw.

Man sieht leicht, dass

$$\mathrm{Lin}\,(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r) = \mathrm{Lin}\,(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r) \quad r = 1, \ldots, k.$$

6.15 Definition. *Seien* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *und* $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n)$ *Basen des* $\mathbb{R}^n$*. Die **Basiswechselmatrix*** $\mathbf{M}_S^B\,(id)$ *von der Basis* $\mathbf{B}$ *zur Basis* $\mathbf{S}$ *ist diejenige Matrix, deren* j*-te Spalte aus den* $\mathbf{S}$*-Koordinaten des* j*-ten Basisvektors von* $\mathbf{B}$ *besteht.*

- $id : (\mathbb{R}^n, \mathbf{B}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{S})$ *„Bilder der alten Basisvektoren in die Spalten"*

$$\mathbf{M}_S^B\,(id) = (k_S\,(\mathbf{b}_1)\,, \ldots, k_S\,(\mathbf{b}_n))\ . \tag{6.16}$$

6.17 Satz. *Sei* $\mathbf{M}_S^B\,(id)$ *die Basiswechselmatrix für den Übergang von der Basis* $\mathbf{B}$ *zur Basis* $\mathbf{S}$*. Dann gilt für alle* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*:*

$$k_S\,(\mathbf{v}) = \mathbf{M}_S^B\,(id)\,k_B\,(\mathbf{v})\,, \tag{6.18}$$

d.h. man erhält die $\mathbf{S}$*-Koordinaten von* $\mathbf{v}$ *indem man* $\mathbf{M}_S^B\,(id)$ *mit den* $\mathbf{B}$*-Koordinaten von* $\mathbf{v}$ *multipliziert.*

- Im Spezialfall dass $\mathbf{S} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ die Standardbasis ist, liefert (6.16)

$$\mathbf{M}_S^B(id) = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) =: \mathbf{B}\,,$$

und (6.18)

$$k_S(\mathbf{v}) = \mathbf{B} k_B(\mathbf{v})\ . \tag{6.19}$$

$\mathbf{B}$ ist invertierbar und es gilt

$$k_B(\mathbf{v}) = \mathbf{B}^{-1} k_S(\mathbf{v})\ , \tag{6.20}$$

d.h. $\mathbf{B}^{-1}$ ist die Basiswechselmatrix von der Standardbasis $\mathbf{S}$ zur Basis $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$.

<u>**Beispiel:**</u> Seien $\mathbf{S} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\,, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ zwei Basen des $\mathbb{R}^2$, mit

$$\mathbf{b}_1 = (3,4)^T\,, \quad \mathbf{b}_2 = (-1,2)^T\ .$$

a) Übergang $\mathbf{B} \to \mathbf{S}$. Die $\mathbf{S}$-Koordinaten von $\mathbf{b}_i$ in die Spalten

$$\mathbf{M}_S^B(id) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Sei $k_B(\mathbf{v}) = (1,3)^T$ die $\mathbf{B}$-Koordianten von $\mathbf{v}$. Welcher Vektor ist dies?

$$k_S(\mathbf{v}) = \mathbf{M}_S^B(id)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}\ .$$

b) Übergang $\mathbf{S} \to \mathbf{B}$. Aus (6.20) folgt:

$$\mathbf{M}_B^S(id) = \left(\mathbf{M}_B^S(id)\right)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\ .$$

Also sind die $\mathbf{B}$-Koordinaten von $\mathbf{v} = (1,1)^T$

$$k_B(\mathbf{v}) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\ .$$

6.21 Ortsvektoren. *Die Zeilen-n-tupel* $(x_1, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$, *nennt man* ***Punkte*** *im n-dimensionalen* ***Punktraum*** $\mathbb{R}_n$. *Zu jedem Punkt* $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ *gehört ein eindeutig bestimmter Vektor* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *und umgekehrt. Ist* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}_n$ *ein fester Punkt, so ist*

$$\overrightarrow{\mathbf{PX}} = \mathbf{x} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

der ***Ortsvektor*** *des Punktes* $\mathbf{X}$ *bezüglich* $\mathbf{P}$. *Insbesondere ist* $\mathbf{x}$ *der Ortsvektor von* $\mathbf{X}$ *bezüglich des Nullpunktes* $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

6.23 Definition. ***Ein affines Koordinatensystem*** $K = (\mathbf{P}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *des Punktraumes* $\mathbb{R}_n$ *besteht aus einem festen Bezugspunkt* $\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ *und einer Basis* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *des* $\mathbb{R}^n$. *Die Koordinaten* x'_i *des Ortsvektors* $\overrightarrow{\mathbf{PX}}$ *bezüglich der Basis* $\mathbf{B}$, *d.h.*

$$\overrightarrow{\mathbf{PX}} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{b}_i \,,$$

heißen ***Koordinaten des Punktes*** $\mathbf{X}$ ***im Koordinatensystem*** K, *man schreibt* $\mathbf{X}_K = (x'_1, \ldots, x'_n) = \left(k_B\left(\overrightarrow{\mathbf{PX}}\right)\right)^T$.

• Nach (6.20),(6.22) gilt

$$\begin{aligned} k_B\left(\overrightarrow{\mathbf{PX}}\right) &= \mathbf{B}^{-1} k_S\left(\mathbf{x} - \mathbf{p}\right) \\ \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} &= \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.24}$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
k_S(\mathbf{x}-\mathbf{p}) &= \mathbf{B}k_B\left(\overrightarrow{\mathbf{PX}}\right), \text{ d.h.} \\
k_S(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}k_B\left(\overrightarrow{\mathbf{PX}}\right) + k_S(\mathbf{P}) \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \mathbf{B}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

Beispiel: Seien $(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ die kartesischen Koordinaten und $(\mathbf{P}, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$ Polarkoordinaten, wobei

$$
\begin{aligned}
k_S(\mathbf{e}_r) &= (\cos\varphi, \sin\varphi)^T , \\
k_S(\mathbf{e}_\varphi) &= (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)^T , \\
\mathbf{M}_S^P(\varphi, r) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Wir wählen $r = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$ und $k_P(\mathbf{v}) = (1,1)^T$ und erhalten

$$
k_S(\mathbf{v}) = \mathbf{M}_S^P(\varphi, r)\, k_P(\mathbf{v}) + k_S(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .
$$

Umgekehrt sei $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $k_S(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $k_S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir haben

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_S^P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \\
\mathbf{M}_P^S\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) &= \left(\mathbf{M}_S^P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)\right)^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$
k_P(\mathbf{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 - p_1 \\ v_2 - p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .
$$

6.26 Definition. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Die Matrix*

$$
\mathbf{M}_B^B(f) := (k_B(f(\mathbf{b}_1)), \ldots, k_B(f(\mathbf{b}_n))) ,
$$

in deren Spalten die $\mathbf{B}$*-Koordinaten von* $f(\mathbf{b}_j)$ *stehen heißt* ***Abbildungsmatrix von f bezüglich*** $\mathbf{B}$.

• *Für die Standardbasis schreiben wir* $\mathbf{M}_S^S(f)$ *statt* $\mathbf{M}(f)$ *(vergleiche Satz 6.4).*

• *Es gilt:* $k_B\left(f(\mathbf{x})\right) = \mathbf{M}_B^B(f)\, k_B(\mathbf{x})$.

6.27 Satz. *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine lineare Abbildung und sei* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ *eine Basis von* $\mathbb{R}^n$*. Es gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B^B(f) &= \mathbf{M}_B^S(id)\, \mathbf{M}_S^S(f)\, \mathbf{M}_S^B(id) \\ &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}_S^S(f)\, \mathbf{B}\,. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Beispiel: Sei s eine Spiegelung an der zu $\mathbf{a}$, $\|\mathbf{a}\| = 1$, orthogonalen Ebene. Dann ist

$$\begin{aligned} s(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}\,, \\ \mathbf{M}_S^S(s) &= \begin{pmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_2a_1 & -2a_1a_3 \\ -2a_1a_2 & 1-2a_2^2 & -2a_3a_2 \\ -2a_1a_3 & -2a_2a_3 & 1-2a_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei $\mathbf{b}$, $\|\mathbf{b}\| = 1$, $\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. Dann ist $\mathbf{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b})$ eine Basis und es gilt:

$$s(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}, \qquad s(\mathbf{b}) = \mathbf{b}, \qquad s(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\,,$$

denn $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Also gilt

$$\mathbf{M}_B^B(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und $\mathbf{M}_B^B(s) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{B}$.

6.29 Definition. *Zwei Matrizen* $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *heißen* ***ähnlich****, wenn es eine invertierbare Matrix* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt mit*

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

• *Durch geschickte Wahl einer Basis* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ *kann* $\mathbf{M}_B^B(f)$ *für eine gegebene lineare Abbildung* f *eine sehr einfache Form haben. Sei* $\mathbf{b}_1$ *derart,* *dass* $f(\mathbf{b}_1) = \lambda_1 \mathbf{b}_1$. *Für die Basis* $\mathbf{B}$ *deren erster Vektor* $\mathbf{b}_1$ *ist gilt:*

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{M}_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & * & \ddots \end{pmatrix}.$$

Gilt $f(\mathbf{b}_2) = \lambda_2 \mathbf{b}_2$, *dann ist:*

$$\mathbf{M}_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

> *Wie kann man solche* $\mathbf{b}_i$ *finden? Für welche Abbildung gibt es eine Basis* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *so, dass*
>
> $$f(\mathbf{b}_i) = \lambda_i \mathbf{b}_i \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dies ist das sogenannte ***Normalformen-*** *oder* ***Eigenwertproblem****. Es ist eng verbunden mit Nullstellen von Polynomen. Demzufolge lassen wir von nun an auch komplexe Skalare zu, d.h.* $\mathbb{R}$ *wird durch* $\mathbb{C}$ *ersetzt. Alle bisherigen Aussagen bleiben wahr.*

6.30 Definition. *Eine Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *heißt* ***Eigenwert*** *einer Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *wenn es wenigstens einen Spaltenvektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, *gibt mit*

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}. \tag{6.31}$$

Jeder Vektor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, *der* (6.31) *erfüllt, heißt* ***Eigenvektor*** *von* $\mathbf{A}$ *zum Eigenwert* λ.

Beispiel: Für die Spiegelung $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}$, $\|\mathbf{a}\| = 1$ gilt $s(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$ und also $\mathbf{M}_S^S(s)\,\mathbf{a} = -\mathbf{a}$, d.h. -1 ist Eigenwert und $\mathbf{a}$ Eigenvektor von $\mathbf{M}_S^S(s)$.

6.32 Definition. *Das charakteristische Polynom einer Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ist definiert durch*

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \tag{6.33}$$

- *Die Determinante in* (6.33) *ist explizit zu berechnen, wobei* λ *eine Variable ist. Man kann zeigen, dass gilt:*

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^n - \mathrm{Sp}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det\mathbf{A},$$

wobei

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{6.34}$$

6.35 Satz. *Es ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwert von $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_{\mathbf{A}}$ ist.*

6.36 Definition. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ihr Eigenwert. Die **algebraische Vielfachheit** $k(\lambda)$ von λ ist die Ordnung von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Der **Eigenraum** $E(\lambda)$ zum Eigenwert λ ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0$, d.h.*

$$E(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\,. \tag{6.37}$$

*Die Dimension des Eigenraums heißt **geometrische Vielfachheit** $m(\lambda)$ des Eigenwerts λ.*

6.38 Satz. *Eigenvektoren $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r \in \mathbb{C}^n$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind linear unabhängig.*

6.39 Satz. *Besitzt eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ mit nicht notwendig verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann gilt mit $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r) \in \mathbb{C}^{n\times n}$*

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{6.40}$$