$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^n - \mathrm{Sp}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det \mathbf{A},$$

wobei

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{6.34}$$

6.35 Satz. *Es ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwert von $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_{\mathbf{A}}$ ist.*

6.36 Definition. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ihr Eigenwert. Die **algebraische Vielfachheit** $k(\lambda)$ von λ ist die Ordnung von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Der **Eigenraum** $E(\lambda)$ zum Eigenwert λ ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0$, d.h.*

$$E(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\,. \tag{6.37}$$

*Die Dimension des Eigenraums heißt **geometrische Vielfachheit** $m(\lambda)$ des Eigenwerts λ.*

6.38 Satz. *Eigenvektoren $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \in \mathbb{C}^n$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind linear unabhängig.*

6.39 Satz. *Besitzt eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ mit nicht notwendig verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann gilt mit $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r) \in \mathbb{C}^{n\times n}$*

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{6.40}$$

6.41 Satz. *Eine Matrix besitzt genau dann n linear unabhängige Eigenvektoren, wenn die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte gleich n ist, d.h.*

$$\sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = n. \tag{6.42}$$

6.43 Folgerung. *Falls* (6.42) *gilt, ist $\mathbf{A}$ ähnlich einer Diagonalmatrix, d.h.* (6.40) *gilt.*

6.44 Folgerung. *Falls für alle Eigenwerte von* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen, gibt es eine Basis* $\mathbf{B}$ *des* $\mathbb{C}^n$ *so, dass* (6.40) *gilt.*

• *Durch die Identifizierung von linearen Abbildungen und Matritzen erhalten wir folgenden Satz.*

6.45 Satz. *Sei* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *eine lineare Abbildung und sei* $\mathbf{A} = \mathbf{M}_S^S(f) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ihre Abbildungsmatrix. Falls die geometrischen und die algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte der Matrix* $\mathbf{A}$ *übereinstimmen, gibt es eine Basis* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *des* $\mathbb{C}^n$ *aus Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$ *so, dass gilt:*

$$\mathbf{M}_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

6.46 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Bestimme alle Nullstellen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *des charakteristischen Polynoms* $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$, *d.h.*

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{k_r} ,$$

wobei λ_i *die Eigenwerte von* $\mathbf{A}$ *mit der algebraischen Vielfachheit* $k(\lambda_i) = k_i$ *sind.*

b) Bestimme die Eigenräume $\mathbf{E}(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}), i = 1, \ldots, r$, *und berechne für jeden eine Basis. Die Dimension von* $\mathbf{E}(\lambda_i), i = 1, \ldots, r$ *ist die geometrische Vielfachheit* $m(\lambda_i)$ *des Eigenwertes* λ_i.

c) Überprüfe, ob für alle $\lambda_i, , i = 1, \ldots, r$ *gilt* $k(\lambda_i) = m(\lambda_i)$. *Falls ja, so ist* $\mathbf{A}$ *bezüglich der aus den Basen der Eigenräume* $\mathbf{E}(\lambda_i)$ *zusammengesetzten Basis ähnlich einer Diagonalmatrix.*

- *Falls* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und alle Eigenwerte reell sind, d.h.* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, *dann gelten Satz 6.39, Folgerung 6.44 und Satz 6.45 analog mit Matrizen* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *bzw. Basen* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *des* $\mathbb{R}^n$. *Diese können mit Hilfe des Verfahrens aus 6.46 berechnet werden.*

- *Leider gilt im Allgemeinen nicht* $m(\lambda_i) = k(\lambda_i)$.

Beispiele:

1) Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda_1 + 1)(\lambda_1 - 3)\,.$$

Also sind $\lambda_1 = -1$, und $\lambda_2 = 3$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Das System $(\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ hat die Lösung $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^T$. Die Lösung von $(\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ ist $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^T$. Also gilt: $\dim \mathbf{E}(\lambda_i) = 1, i = 1, 2$, und $\mathbf{A}$ ist ähnlich einer Diagonalmatrix, d.h. mit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

2) Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ gilt $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda - 3)^2$. Also ist der Eigenwert von $\mathbf{A}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Da $\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $k(\lambda_1) = 2$ und $\mathbf{E}(\lambda_1) = \mathbb{R}^2$, d.h. $k(\lambda_1) = m(\lambda_1)$. Mit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

3) Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ haben wir

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2\,.$$

Also ist der Eigenwert von $\mathbf{A}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ und $k(\lambda_1) = 2$. Der Eigenraum $\mathbf{E}(\lambda_1)$ hat die Dimension 1, d.h. $m(\lambda_1) = 1$ und $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^T$ ist eine Basis von $\mathbf{E}(\lambda_1)$, denn

$$\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Also ist $k(\lambda_1) \neq m(\lambda_1)$ und $\mathbf{A}$ ist nicht ähnlich einer Diagonalmatrix. Aber man kann $\mathbf{A}$ mit folgendem Verfahren in eine einfachere Form bringen.
Sei $\mathbf{v}_2$ die Lösung von $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, d.h. $\mathbf{v}_2 = (1,0)^T$. Setze man nun $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$, d.h. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dann gilt:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Man sagt, dass $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$ ein 3-er Block der Länge zwei ist. Allgemein ist ein **λ-Block der Länge k** gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k} .$$

4) Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ haben wir

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)\,(\lambda + 2i) .$$

Also sind $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Eine Basis von $\mathbf{E}(\lambda_1)$ berechnet sich durch

$$\begin{pmatrix} 2i-1 & 5 \\ -1 & 2i+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2i-1 \\ 2i-1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2i-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

d.h. $\mathbf{v}_2 = (2i+1,1)^T$. Analog für $\mathbf{E}(\lambda_2)$:

$$\begin{pmatrix} -2i-1 & 5 \\ -1 & -2i+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2i-1 \\ -2i-1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2i-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

d.h. $\mathbf{v}_2 = (-2i+1,1)^T$. Somit gilt mit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2i+1 & -2i+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} .$$

6.47 Satz (Jordansche Normalform). *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und seien alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von $\mathbf{A}$ reell. Dann ist $\mathbf{A}$ ähnlich einer diagonalen Blockmatrix bestehend aus λ_j-Blöcken.*

- *Zu einem Eigenwert λ können verschiedene λ-Blöcke auftreten.*

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \textit{Länge 3} \\ \\ \textit{Länge 2} \\ \\ \textit{Länge 1} \end{array}$$

- *Bis auf die Reihenfolge ist die diagonale Blockmatrix eindeutig bestimmt.*

6.7 Symmetrische Matrizen

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt unter geeigneten Voraussetzungen

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 .$$

Im nächsten Kapitel betrachten wir Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für die analog gilt,

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(\mathbf{x}_0)(x - x_0)_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)(x - x_0)_i (x - x_0)_j .$$

Wir setzen $f(\mathbf{x}_0) =: \alpha_0$, $\mathbf{a} := (D_1 f(\mathbf{x}_0), \dots, D_n f(\mathbf{x}_0))^T$ und $\mathbf{A} := \left(D_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ und erhalten

$$f(\mathbf{x}) \approx \alpha_0 + \mathbf{a}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) .$$

Aber es gilt $x_i x_j = x_j x_i$ und demzufolge kann man $\mathbf{A}$ durch die Matrix mit den Komponenten $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ ersetzen, d.h. durch ihren symmetrischen Anteil.

7.1 Definition. *Eine Funktion $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst* ***quadratische Form*** *falls*

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$$

mit einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Ist $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix, so heisst q rein quadratisch.

7.2 Basiswechsel. *Sei $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ eine Darstellung der quadratischen Form bezüglich der Standardbasis $\mathbf{S}$. Sei $\mathbf{B}$ eine andere Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{M}_S^B\,(id)$ die Basiswechselmatrix für den Übergang von $\mathbf{B}$ nach $\mathbf{S}$. Nach* (6.18) *gilt*

$$k_S(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_S^B\,(id)\,k_B(\mathbf{x}) = \mathbf{B}k_B(\mathbf{x})$$

und somit ist

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= k_S(\mathbf{x})^T\mathbf{A}k_S(\mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{B}k_B(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{A}\mathbf{B}k_B(\mathbf{x}) \\ &= k_B(\mathbf{x})^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}k_B(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

eine Darstellung von $q(\mathbf{x})$ bezüglich der Basis $\mathbf{B}$.

7.3 Definition. *Als* ***Hauptachsensystem*** *der quadratischen Form $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ (bzw. der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$) bezeichnet man eine Orthonormalbasis $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ des $\mathbb{R}^n$, wenn $q(\mathbf{x})$ bezüglich der Basis $\mathbf{B}$ rein quadratisch ist.*

- *Nach 7.2 ist $\mathbf{B}$ ein Hauptachsensystem einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A}$ genau dann, wenn $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$ eine Diagonalmatrix ist. Also suchen wir eine invertierbare Matrix $\mathbf{B}$ mit der $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$ eine Diagonalmatrix ist. Dies ist nicht mit dem Normalformenproblem zu verwechseln, bei dem man für eine nicht notwendigerweise symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ eine invertierbare Matrix $\mathbf{B}$ sucht, so dass $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$ eine Diagonalmatrix ist.*

7.4 Satz. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:*

i) Alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind reell.

ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

iii) Algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes sind gleich.

7.5 Satz (Hauptachsentransformation). *Zu jeder quadratischen Form $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$ bzw. jeder symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gibt es wenigstens ein Hauptachsensystem. Es wird wie folgt berechnet:*
Zu jedem der verschiedenen Eigenwerte $\lambda_i, 1 \le i \le r$, von $\mathbf{A}$ bestimmt man eine orthonormale Basis des Eigenraumes $\mathbf{E}(\lambda_i), 1 \le i \le r$. Diese Teilbasen $(\mathbf{b}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{b}_{k_i}^{(i)})$ zusammengesetzt ergeben das Hauptachsensystem

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_{k_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_1^{(r)}, \dots, \mathbf{b}_{k_r}^{(r)}\right)$$

für das

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1-mal}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{k_r-mal})$$

gilt. Demzufolge gilt

$$q(\mathbf{x}) = k_\mathbf{B}(\mathbf{x})^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}k_\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \lambda_1 \left(k_\mathbf{B}(\mathbf{x})\right)_1^2 + \dots + \lambda_r \left(k_\mathbf{B}(\mathbf{x})\right)_n^2 .$$

Beispiele:

- $n = 2$: Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, mit $b \neq 0$. Bestimme die Eigenwerte λ_1, λ_2 von $\mathbf{A}$. Sei $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T, \|\mathbf{b}\| = 1$ der zu λ_1 gehörende Eigenvektor, d.h. $(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Nach Satz 7.5 existiert ein Hauptachsensystem. Also gibt es einen Vektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ mit $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$. Wir erhalten also $\mathbf{c} = \pm(-b_2, b_1)^T$ und $\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ ist ein Hauptachsensystem.

- $n = 3$: Sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\mathbf{A} \neq \lambda\mathbf{E}$. Also existieren zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ von $\mathbf{A}$. Habe λ_1 die geometrische Vielfachheit 1. Bestimme je einen Einheitsvektor $\mathbf{b}_i$ aus $\mathbf{E}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Dann ist $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ orthogonal zu $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ das gesuchte Hauptachsensystem.

Kapitel 7

Differentation von Funktionen mehrerer Variablen

In diesem Kapitel betrachten wir Funktionen der Form

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$. $\mathbb{R}^n$ heißt Urbildraum, D **Definitionsbereich**, $\mathbb{R}^m$ Bildraum und das **Bild von f** ist

$$\mathbf{f}(D) := \{\mathbf{f}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in D\} .$$

7.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

1.1 Parameterdarstellung. *Kurven stellt man sich am besten als die Bahn eines bewegten Punktes vor, wobei man jedem Zeitpunkt t einen Ortsvektor $\mathbf{x}(t)$ zuordnet. Sei also $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ eine gegebene vektorwertige Funktion. Die Funktionen $x_i : i \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ heißen* ***Komponentenfunktion*** *von $\mathbf{x}$.*

1.2 Definition. *Sei $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Die Funktion $\mathbf{x}$ hat im Punkt $t_0 \in I$ den* ***Grenzwert*** *$\mathbf{c}$, in Zeichen $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$, genau dann, wenn*

$$\lim_{t \to t_0} x_i(t) = c_i, \qquad 1 \leq i \leq n .$$

- *Der Grenzwert ist komponentenweise definiert und wird somit zurückgeführt auf Grenzwerte von Funktionen einer Variablen.*

- *Analog heißt* $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ ***stetig*** *bzw* ***differenzierbar****, wenn alle Komponentenfunktionen stetig bzw. differenzierbar sind. Die Ableitung wird komponentenweise berechnet, d.h.*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{n} \left(\mathbf{x}(t-h) - \mathbf{x}(t)\right) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} . \tag{1.3}$$

Man nennt $\dot{\mathbf{x}}(t)$ *den* ***Tangentialvektor*** *von* $\mathbf{x}$ *an der Stelle* t*.*

1.4 Lemma. *Es gelten folgende Rechenregeln für differenzierbare Funktionen* $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ *und* $\alpha : I \to \mathbb{R}$*:*

a) $\frac{d}{dt}\left(\alpha\mathbf{x}(t) + \beta\mathbf{y}(t)\right) = \alpha\dot{\mathbf{x}}(t) + \beta\dot{\mathbf{y}}(t)$ $, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

b) $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)\right) = \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t)$,

c) $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t)\right) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{y}}(t), \quad n = 3$,

d) $\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\mathbf{x}(t)\right) = \dot{\alpha}(t)\mathbf{x}(t) + \alpha(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$.

- *Aus* $\|\mathbf{x}(t)\|^2 = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$ *folgt:*

$$\|\mathbf{x}(t)\| = const. \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \,. \tag{1.5}$$

1.6 Definition. *Sei* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$*. Wir nennen jede stetig differenzierbare Funktion* $\mathbf{x} : [a,b] \to G$ *eine* ***Parameterdarstellung*** *des* ***Kurvenstücks*** $\{\mathbf{x}(t); t \in [a,b]\}$ *mit Anfangspunkt* $\mathbf{x}(a)$ *und Endpunkt* $\mathbf{x}(b)$*. Ein Kurvenstück heißt* ***regulär****, wenn* $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$ *für alle* $t \in [a,b]$ *gilt.*

- *Eine* ***Kurve*** *ist eine Kette von Kurvenstücken. Diese muss in den Berührungspunkten nicht differenzierbar sein.*

- *Oft wird sowohl die Parameterdarstellung* $\mathbf{x}(t)$ *als auch das Kurvenstück* $\{\mathbf{x}(t), t \in [a,b]\}$ *einfach als Kurvenstück oder Kurve bezeichnet.*

1.7 Definition. *Sei* $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *ein reguläres Kurvenstück. Dann heißt*

$$s(\tau) := \int_a^\tau \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt$$

die ***Bogenlänge*** *des Kurvenstücks über* $[a,\tau]$.

- *Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Kapitel 4, Satz 1.11) gilt*

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \,. \tag{1.8}$$

- *Analog zu Kapitel 4, Satz 5.27 nennen wir*

$ds := \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|\, dt$ *das* ***Bogenelement*** *von* $\mathbf{x}$, *und*
$d\mathbf{x} := \dot{\mathbf{x}}(t)dt$ *das* ***vektorielle Bogenelement*** *von* $\mathbf{x}$.

1.9 Definition. *Sei* $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *zweimal stetig differenzierbar mit* $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$ *und* $\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$. *Dann sind*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &:= \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} && \text{der } \textbf{\textit{Tangenten(einheits)vektor}}, \\ \mathbf{N}(t) &:= \frac{\dot{T}(t)}{\left\|\dot{T}(t)\right\|} && \text{der } \textbf{\textit{Normalen(einheits)vektor}}, \\ \mathbf{B}(t) &:= \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) && \text{der } \textbf{\textit{Binormalenvektor}}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Das Rechtssystem $(\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t))$ *wird begleitendes* ***Dreibein*** *genannt.*

- *Der Grenzwert der Änderungsrate* $\frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{T(t_1)-T(t_2)}{s(t_1)-s(t_2)}$ *des Tangentialeinheitsvektors heißt* ***Krümmungsvektor*** *und ist durch* $\frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\dot{s}(t)}$ *gegeben. Seine Länge heißt Krümmung*

$$\kappa(t) := \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\dot{s}(t)} = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \,. \tag{1.11}$$

1.12 Lemma. *Wir haben die Darstellungen*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}(t)\mathbf{T}(t) \,, \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \ddot{s}(t)\mathbf{T}(t) + \dot{s}(t)^2\kappa(t)\mathbf{N}(t) \,. \end{aligned}$$

1.13 Lemma. *Wir haben folgende Darstellungen:*

a) $\kappa(t) = \dfrac{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}$,

b) $\mathbf{B}(t) = \dfrac{\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|}$.

Beispiel: Eine Schraubenkurve hat die Darstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} .$$

Somit erhalten wir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \sqrt{r^2+h^2} = \dot{s}(t) =: R\,,$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix} ,$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{R}{r} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} h\sin t \\ -h\cos t \\ h \end{pmatrix} ,$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}\|}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} = \frac{r}{RR} = \frac{r}{r^2+h^2} .$$