iii) *Algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes sind gleich.*

7.5 Satz (Hauptachsentransformation). *Zu jeder quadratischen Form* $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ *bzw. jeder symmetrischen Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, gibt es wenigstens ein Hauptachsensystem. Es wird wie folgt berechnet:*
Zu jedem der verschiedenen Eigenwerte $\lambda_i, 1 \le i \le r$*, von* $\mathbf{A}$ *bestimmt man eine orthonormale Basis des Eigenraumes* $\mathbf{E}(\lambda_i), 1 \le i \le r$*. Diese Teilbasen* $(\mathbf{b}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{b}_{k_i}^{(i)})$ *zusammengesetzt ergeben das Hauptachsensystem*

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_{k_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_1^{(r)}, \dots, \mathbf{b}_{k_r}^{(r)}\right)$$

für das

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1-mal}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{k_r-mal})$$

gilt. Demzufolge gilt

$$q(\mathbf{x}) = k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \lambda_1\left(k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\right)_1^2 + \cdots + \lambda_r\left(k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\right)_n^2 .$$

Beispiele:

- $n = 2$: Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, mit $b \neq 0$. Bestimme die Eigenwerte λ_1, λ_2 von $\mathbf{A}$. Sei $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T, \|\mathbf{b}\| = 1$ der zu λ_1 gehörende Eigenvektor, d.h. $(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Nach Satz 7.5 existiert ein Hauptachsensystem. Also gibt es einen Vektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ mit $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$. Wir erhalten also $\mathbf{c} = \pm(-b_2, b_1)^T$ und $\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ ist ein Hauptachsensystem.

- $n = 3$: Sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\mathbf{A} \neq \lambda\mathbf{E}$. Also existieren zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ von $\mathbf{A}$. Habe λ_1 die geometrische Vielfachheit 1. Bestimme je einen Einheitsvektor $\mathbf{b}_i$ aus $\mathbf{E}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Dann ist $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ orthogonal zu $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ das gesuchte Hauptachsensystem.

7.6 Definition. *Eine quadratische Form* $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$*, bzw. die zugehörige symmetrische Martrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, heißt* ***positiv definit (negativ definit)****, wenn aus* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *stets* $q(\mathbf{x}) > 0$ $(q(\mathbf{x}) < 0)$ *folgt. Die quadratische Form heißt* ***indefinit****, wenn sie sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Sie heißt* ***positiv (negativ) semidefinit*** *wenn stets* $q(\mathbf{x}) \geq 0$ $(q(\mathbf{x}) \leq 0)$ *gilt.*

7.7 Satz.

a) $\mathbf{D} = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *ist genau dann positiv definit, wenn alle* α_i *positiv sind.*

b) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ *ist genau dann positiv definit, wenn* $\mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{W}$ *für irgendeine invertierbare Matrix* $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *positiv definit ist.*

c) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ *ist genau dann positiv definit, wenn sämtliche Eigenwerte von* $\mathbf{A}$ *positiv definit sind.*

- *Der Satz gilt analog für negativ definite symmetrische Matrizen, d.h.* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ *ist negativ definit genau dann wenn alle Eigenwerte negativ sind.* $\mathbf{D} = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *ist genau dann negativ definit, wenn alle* $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$ *negativ sind.*

7.8 Positivitätskriterium. *Es sei* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$*. Es gilt* $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_i = a_{ii}$*. Damit haben wir eine notwendige Bedingung:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \text{ positiv definit } \Rightarrow a_{ii} > 0, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{7.9}$$

Sei $n = 2$ *und* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, mit* $a, d > 0$*. Mit Zeilen- und Spaltenumformungen erhalten wir*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ positiv definit } \Leftrightarrow a > 0, \det \mathbf{A} = ad - b^2 > 0 \tag{7.10}$$

7.11 Satz. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{A} = (a_{ij})$ *ist genau dann positiv definit, wenn die Determinaten der* ***Hauptuntermatrizen*** $\mathbf{H}_i$ *positiv sind:*

$$\mathbf{H}_1 = a_{11} \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \mathbf{H}_n = \mathbf{A}\,.$$

7.12 Satz. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ *ist genau dann negativ definit, wenn für die Determinanten der Hauptuntermatrizen gilt:*

$$(-1)^k \det \mathbf{H}_k > 0\,.$$