3.22 Definition. *Sei* $\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; g(\mathbf{x}) = 0\}$. *Man sagt,* $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$ *ist ein* ***Maximum (Minimum) von*** f ***unter der Nebenbedingung*** $g(\mathbf{x}) = 0$, *wenn es eine Umgebung* $B_r(\mathbf{a})$ *gibt so, dass* $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a})$, $(f(\mathbf{a}) \le f(\mathbf{x}))$ *gilt für alle* $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap M$.

3.23 Satz (Lagrange Multiplikator). *Zu jeder Lösung* $\mathbf{a}$ *des Extremalproblems mit Nebenbedingung*

$$f(\mathbf{x}) = \text{ Extr ! } \qquad \text{NB } g(\mathbf{x}) = 0$$

mit C^1*-Funktionen* f, g *und* grad $g(\mathbf{a}) \neq 0$ *gibt es eine Zahl* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, *der* ***Lagrange Multiplikator***, *so, dass gilt:*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) + \lambda_0 \operatorname{grad} g(\mathbf{a}) = 0\,.$$

- *Satz 3.22 besagt, dass in Extremalstellen die Gradienten von* f *und* g *parallel sind.*

3.24 Lagrange Multiplikatorregel. *Satz 3.23 liefert folgendes Verfahren zur Bestimmung von Extremalstellen mit Nebenbedingungen:*

1. *Bilde die Hilfsfunktion*

   $$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) := f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

   und berechne grad L.

2. *Bestimme die Lösungen* $(\mathbf{a}, \lambda_0)$ *von* grad $L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$, *d.h. löse das System*

   $$\begin{aligned} L_{x_i}(\mathbf{x}, \lambda) &= f_{x_i}(\mathbf{x}) + \lambda g_{x_i}(\mathbf{x}) = 0, \qquad i = 1, \dots, n\,, \\ L_\lambda(x, \lambda) &= g(\mathbf{x}) = 0\,. \end{aligned}$$

3. *Man untersucht welche der gefundenen Werte* $\mathbf{a}$ *tatsächlich Extremalstellen sind. Dies ist oft sehr kompliziert. Am Ende sind noch die Punkte* $\mathbf{b}$, *in denen* f, g *nicht differenzierbar sind bzw.* grad $g(\mathbf{b}) = 0$ *ist, zu betrachten.*

Beispiel: *Sei* $f(x,y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$*, mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, und* $g(x,y) = 1 - xy$ *die Nebenbedingung. Dann bilden wir die Lagrange Funktion* $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ *und berechnen den Gradienten:*

$$\begin{aligned} L_x &= x^{p-1} - \lambda y\,, \\ L_y &= y^{q-1} - \lambda x\,, \end{aligned}$$

Die stationären Punkte, d.h. $\operatorname{grad} L = 0$*, berechnen sich wie folgt: Die ersten beiden Gleichungen liefern:*

$$x^{p-1} = \lambda y \quad y^{q-1} = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \frac{x^{p-1}}{y} = \frac{y^{q-1}}{x} \quad \Rightarrow \quad x = y^{\frac{q}{p}}\,.$$

Aus der 3. Gleichung erhalten wir

$$y^{\frac{p+q}{p}} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1\,.$$

Somit ist der Punkt $(1,1)$ *ein Kandidat für ein Extremum.*
Die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ *ist äquivalent zu* $y = \frac{1}{x}$*. Also hat die Funktion* $h(x) = f(x, \frac{1}{x}) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^{-q}$ *in* $x = 1$ *einen stationären Punkt. Wir haben:*

$$\begin{aligned} h'(x) &= x^{p-1} - x^{-q-1}\,, \\ h''(x) &= (p-1)x^{p-2} + (q+1)x^{-q-2}, \\ h''(1) &= p - 1 + q + 1 = p + q > 0\,. \end{aligned}$$

Also ist $x = 1$ *ein globales Minimum, d.h.* $f(x,y) \geq 1$ *für alle* $x, y > 0$ *mit* $xy = 1$*. Die spezielle Wahl* $x = \dfrac{u}{(uv)^{1/p}}$ *und* $y = \dfrac{v}{(uv)^{1/q}}$ *erfüllt die Bedingung* $xy = 1$ *und somit erhalten wir*

$$\frac{1}{p}\frac{u^p}{uv} + \frac{1}{q}\frac{v^q}{uv} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\,.$$

Dies ist die sogenannte ***Hölder Ungleichung****.*

- *Im Falle mehrerer Nebenbedingungen geht man analog vor. Seien* $f, g_i, i = 1, \ldots, k$ C^1*-Funktionen und seien für alle* $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ $\operatorname{grad}\ g_i(\mathbf{x}), i = 1, \ldots, k$ *linear unabhängig, wobei* $\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in$

$\mathbb{R}^n; g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, k\}$ *ist. Dann findet man die Lösung des Extremalproblems mit Nebenbedingungen*

$$f(\mathbf{x}) = \mathit{Extr}\ ! \qquad \mathit{NB}\ g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

unter den stationären Punkten der Lagrange Funktion

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) .$$

3.25 Extremwertbestimmung. *Sei f auf der Menge*

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; g_i(\mathbf{x}) \le 0, i = 1, \dots, r\}$$

definiert. Kandidaten für Extremwerte sind:

a) Die Ecken von U (falls vorhanden sind sie die eindeutigen Lösungen von Kombinationen $g_i(\mathbf{x}) = \cdots = g_k(\mathbf{x}) = 0$ sonst $g_l(\mathbf{x}) < 0$).

b) Die Extremalstellen auf dem Rand von U, d.h. $g_i(\mathbf{x}) = 0$ für ein i, die man mit 3.24 berechnet.

c) Die stationären Punkte im Innern von U. Diese Menge ist gegeben durch:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; g_i(\mathbf{x}) < 0, i = 1, \dots, r\} .$$

d) Die Punkte in U in denen f nicht differenzierbar ist.

Beispiel: Sei $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ und $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Punkte a) und d) in 3.25 entfallen. Damit ist die Menge $U = B_1(\mathbf{0})$ die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius 1.

- Im Innern von U d.h. Punkte (x,y) für die gilt: $x^2 + y^2 < 1$. Für die partiellen Ableitungen gilt:

  $$f_x = 6x - 2y, \quad f_y = -2x + 2y .$$

  Es gibt nur einen stationären Punkt, nämlich $(x,y) = (0,0)$. Für die Hesse Matrix gilt:

  $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} ,$$

  Und somit ist $6 > 0$, $\det H = 12 - 4 > 0$. Also ist $H_f(0,0)$ positiv definit und $(0,0)$ ist ein lokales Minimum.

- Auf dem Rand, d.h. Punkte (x, y) für die $x^2 + y^2 = 1$ gilt:
  Die Lagrange Funktion ist

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)\,.$$

Deren Ableitungen berechnen sich als

$$\begin{aligned} L_x &= 6x - 2y + 2\lambda x\,, \\ L_y &= 2y - 2x + 2\lambda y\,, \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 - 1\,. \end{aligned}$$

Das System von Gleichungen grad $L = 0$ kann man schreiben als: $\mathbf{A}(x, y)^T = -\lambda(x, y)^T$ mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Dies ist ein Eigenwertproblem und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2\,, \\ \lambda_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$ ist $(1, 1 - \sqrt{2})^T$. Die Bedingung $x^2 + y^2 = 1$ bedeutet, dass wir einen Einheitsvektor suchen. Dieser ist

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Analog erhalten wir für λ_2:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Kandidaten für Extremstellen sind also $\pm\mathbf{v}_1, \pm\mathbf{v}_2$. Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) = f(-\mathbf{v}_1) = 2 + \sqrt{2} = \lambda_1 &\qquad \text{Maximum,} \\ f(\mathbf{0}) = 0 \qquad \text{Minimum.} \end{aligned}$$

7.4 Vektorwertige Funktionen

Für Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ werden die Begriffe aus Paragraph 7.2 über die Komponentenfunktionen $f_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$ auf die vektorwertigen Funktionen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$ übertragen.

4.1 Definition. *Sei* $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *und* $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in D$.

a) Der ***Grenzwert****, die* ***partielle Ableitungen*** *und die* ***„klein-o"-Notation*** *sind jeweils komponentenweise erklärt:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad \Leftrightarrow \quad f_j(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|), j = 1, \dots, m.$$

b) $\mathbf{f}$ *ist genau dann* ***stetig, partiell differenzierbar*** *oder eine* ***C^k-Funktion****, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i, i = 1, \dots, m$, stetig, partiell differenzierbar oder C^k-Funktionen sind.*

c) $\mathbf{f}$ *heist im Punkt $\mathbf{x}_0 \in D$* ***total differenzierbar****, wenn es eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und eine r-Umgebung $B_r(\mathbf{x}_0) \subseteq D$ gibt, so dass für alle $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$ gilt:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|). \tag{4.2}$$

- *Aus (4.2) folgt, dass die Komponentenfunktionen total differenzierbar sind. Also gilt für $k = 1, \dots, m$:*

  $$f_k(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}_0) + \operatorname{grad} f_k(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

  Somit ist $\mathbf{A}$ in (4.2) eindeutig bestimmt als

  $$\mathbf{A} = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\mathbf{x}_0)^T \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\mathbf{x}_0)^T \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right)_{i,j}.$$

  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ heißt ***Jacobi-Matrix*** *von $\mathbf{f}$ an der Stelle $\mathbf{x}_0$.*

4.3 Satz. *Jede C^1-Funktion $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, D$ offen, ist auf D total differenzierbar.*

4.4 Satz (Taylor-Formel). *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet, $\mathbf{f} \in C^{k+1}(D, \mathbb{R}^m)$, und $\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{v} \in D$, dann gilt:*

$$f_i(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \partial_{\mathbf{v}}^j f_i(\mathbf{x}) + R_{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \qquad i = 1, \dots, m$$

mit dem Restglied

$$R_{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{(k+1)!} \partial_{\mathbf{v}}^{k+1} f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \xi_{i,k} \mathbf{v})$$

mit $\xi_{i,k} \in (0,1)$ welches von i abhängt.

• *Achtung! Die Punkte im Restglied zwischen $\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{v}$ hängen von der Komponentenfunktion f_i ab!*

4.5 Folgerung. *Für eine C^1-Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt:*

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}_0) + \operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_i^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad i = 1, \dots, m\,,$$

mit $\mathbf{x}_i^*$ zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}_0$. Gilt insbesondere $\|\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x})\| \leq M$ für alle $\mathbf{x} \in D$ und $i = 1, \dots, m$, so gilt:

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| \leq M\, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in D\,.$$

Beispiele:

a) *Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann existiert ein $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Also gilt $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.*

b) *Polarkoordinaten: Die Menge $D = \{(r, \varphi); 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ wird mittels*

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

auf die $\mathbf{x}$-Ebene abgebildet, d.h. $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^2$. Die Jacobi Matrix ist

$$J_{\mathbf{x}}(r, \varphi) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

4.6 Lemma. *Für* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m, f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gelten:*

a) $J_{\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \alpha J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \beta J_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$,

b) $J_{f\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x})(\text{grad } f(\mathbf{x}))^T$,

c) $J_{\mathbf{v}^T\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T J_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^T J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$,

d) $J_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times J_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{x}) \times J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}); m = 3.$

- In obiger Formel ist zu beachten:

  a) $\mathbf{v}(\text{grad } f)^T$ ist eine Matrix

  b) Vektor $\times$ Matrix $\hat{=}$ Vektor $\times$ Spaltenvektoren.

4.7 Satz (Kettenregel). *Sind* $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *in* $\mathbf{x}_0 \in D$ $\mathbf{g} : G \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$, *in* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in D$ *total differenzierbar, dann ist die Komposition* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *in* $\mathbf{x}_0$ *ebenfalls total differenzierbar und es gilt:*

$$J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{g}}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\right) J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}_0\right) .$$

4.8 Basiswechsel. *Sei* $K = (p, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *ein Koordinatensystem im* $\mathbb{R}^n$ *und* $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^m$. *Ein Vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *hat im Koordinatensystem* K *den Koordinatenvektor* $\mathbf{y}$, *der durch*

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{p} \quad (k_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) + k_{\mathbf{S}}(\mathbf{p}))$$

bestimmt ist, wobei $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n), \mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$. *Ein Vektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ *hat bezüglich der Basis* $\mathbf{W}$ *den Koordinatenvektor* $\mathbf{w}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{w} . \quad (k_{\mathbf{S}}(\mathbf{v}) = \mathbf{W}k_{\mathbf{W}}(\mathbf{v}))$$

Eine Funktion $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *besitzt nach diesem Koordinaten- und Basiswechsel eine Darstellung* $\mathbf{g} : D^* \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *die gegeben ist durch*

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= k_{\mathbf{S},\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{f}(k_{\mathbf{S},\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}))\right) \\
&= k_{\mathbf{S},\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{f}(\mathbf{B}k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) + k_{\mathbf{S},\mathbb{R}^n}(\mathbf{p}))\right) \\
&= \mathbf{W}k_{\mathbf{W}}\left(\mathbf{f}(\mathbf{B}k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) + k_{\mathbf{S},\mathbb{R}^n}(\mathbf{p}))\right) \\
&=: \mathbf{W}\mathbf{g}\left(k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\right) .
\end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung $\mathbf{y} = k_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}) = k_{\mathbf{W}}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})\right)$ *erhalten wir*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{p}) = \mathbf{W}\mathbf{g}(\mathbf{y}),$$

d.h.

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{p})$$

und für die Jacobi-Matrix gilt:

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{W}^{-1}J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{B}, \ \mathit{mit}\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{B}\mathbf{y}_0 + \mathbf{p}\,.$$

4.9 Skalaren- und Vektorfelder. *Ein* ***Skalarenfeld*** $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *ordnet jedem Punkt* $\mathbf{x} \in D$ *eine Zahl* $f(\mathbf{x})$ *zu. Ein* ***Vektorfeld*** $\mathbf{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *ordnet jedem Punkt* $\mathbf{x} \in D$ *einen Vektor* $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ *zu. Eine Kurve in* D *heißt* ***Feldlinie*** *des Vektorfeldes* $\mathbf{v}$*, wenn der Vektor* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *in jedem Kurvenpunkt* $\mathbf{x}$ *parallel zur Kurventangente ist.*

4.10 Die starre Drehung. *Eine Rechtsdrehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit* ω *um eine Achse durch den Nullpunkt in Richtung* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T, \|\mathbf{a}\| = 1$ *ist gegeben durch (Kapitel 6* (6.13)*)*

$$\mathbf{x}(t) = \cos(\omega t)\mathbf{x}_0 + (1 - \cos\omega t)(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \sin(\omega t)\mathbf{a} \times \mathbf{x}_0\,,$$

wobei $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ *die Lage zum Zeitpunkt Null bezeichnet. Für die Geschwindigkeit* $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ *gilt also*

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \omega(-sin(\omega t)\mathbf{x}_0 + \sin(\omega t)(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \cos(\omega t)\mathbf{a} \times \mathbf{x}_0) \\ &= \omega\mathbf{a} \times \mathbf{x}(t)\,.\end{aligned}$$

Man nennt $\mathbf{w} := \omega\mathbf{a}$ *die* ***vektorielle Winkelgeschwindigkeit*** *und somit hat das Geschwindigkeitsfeld einer gleichförmigen Drehbewegung die Darstellung*

$$\mathbf{x} \to \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \times \mathbf{x} = \omega\mathbf{a} \times \mathbf{x}\,.$$

Dies ist eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $\mathbf{M}$

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{M} = (\mathbf{v}(\mathbf{e}_1)), \mathbf{v}(\mathbf{e}_2), \mathbf{v}(\mathbf{e}_3)) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & a_2 \\ -a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

die schiefsymmetrisch ist, d.h. $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$*, und deren Spur* $\mathrm{Spur} J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ *Null ist.*

4.11 Das Zentralkraftfeld. *Eine Punktmasse M im Ursprung zieht die Punktmasse m in $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit der Gravitationskraft*

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = c\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{*}$$

an, mit $c = -\gamma m M, \gamma > 0$. Falls es sich um Punktladungen der Stärke Q bzw. q handelt gilt (*) mit $c = kqQ, k > 0$. Das zentrale Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ besitzt die Jacobi Matrix für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}
J_{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}\left(\operatorname{grad}\frac{c}{\|\mathbf{x}\|^3}\right)^T + \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{E}_3 \\
&= \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^5}\left(-3\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\mathbf{E}_3\right) \\
&= \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^5}\begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 - 2x_1^2 & -3x_1x_2 & -3x_1x_3 \\ -3x_1x_2 & x_1^2 + x_3^2 - 2x_2^2 & -3x_2x_3 \\ -3x_1x_3 & -3x_2x_3 & x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

welche symmetrisch ist und deren Spur Null ist.

4.12 Der Wirbel. *Ein gerader stromdurchflossener Draht in Richtung der x_3-Achse besitzt das magnetische Feld*

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^2 - (\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{x})^2}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x} \\
&= \frac{c}{x_1^2 + x_2^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \neq (0, 0), c > 0$. *Die Jacobi Matrix ist*

$$J_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \frac{c}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

welche symmetrisch ist und deren Spur Null ist.

4.13 Die laminare Rohrströmung. *Das Geschwindigkeitsprofil einer zähen Flüssigkeit, die durch ein zur x_2-Achse koaxiales Rohr vom Radius r strömt, ist*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = c(0, r^2 - x_1^2 - x_3^2, 0)^T, \qquad x_1^2 + x_3^2 \leq r, c > 0$$

Die Jacobi Matrix ist

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 & -2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

welche weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist aber Spur Null hat.

4.14 Definition. *Jedem C^1-Skalarenfeld $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wird das Vektrofeld* ***,,Gradient"*** grad $f : D \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right)^T$$

zugeordnet. Jedem C^2-Skalarenfeld $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ordnet der ***Laplace Operator*** Δ *das Skalarenfeld $\Delta f : D \to \mathbb{R}$*

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$$

zu. Zu jedem C^1-Vektorfeld $\mathbf{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert man ein Skalarenfeld ***Divergenz*** div $\mathbf{v}$: $D \to \mathbb{R}$ *und ein Vektorfeld* ***Rotation*** rot $\mathbf{v}$: $D \to \mathbb{R}^3$ *durch die Vorschriften:*

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \\ \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} .$$

- *Mit diesen Begriffen gelten für die Beispiele 4.10 - 4.13:*
  - *Die Divergenz ist Null (Divergenz = Spur J).*
  - *Die Rotation des zentralen Kraftfeldes und des Wirbels sind Null. Die Rotation der gleichförmigen Drehung ist $2\omega\mathbf{a}$ und der laminaren Strömung ist $2c(x_3, 0, -x_1)^T$.*