Die Jacobi Matrix ist

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 & -2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

welche weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist aber Spur Null hat.

4.14 Definition. *Jedem C^1-Skalarenfeld $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wird das Vektrofeld* ***„Gradient“*** $\operatorname{grad} f : D \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right)^T$$

zugeordnet. Jedem C^2-Skalarenfeld $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ordnet der ***Laplace Operator*** Δ *das Skalarenfeld $\Delta f : D \to \mathbb{R}$*

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$$

zu. Zu jedem C^1-Vektorfeld $\mathbf{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert man ein Skalarenfeld ***Divergenz*** $\operatorname{div} \mathbf{v} : D \to \mathbb{R}$ *und ein Vektorfeld* ***Rotation*** $\operatorname{rot} \mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ *durch die Vorschriften:*

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \\[2ex] \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\[2ex] \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} .$$

- *Mit diesen Begriffen gelten für die Beispiele 4.10 - 4.13:*
  - *Die Divergenz ist Null (Divergenz = Spur J).*
  - *Die Rotation des zentralen Kraftfeldes und des Wirbels sind Null. Die Rotation der gleichförmigen Drehung ist $2\omega\mathbf{a}$ und der laminaren Strömung ist $2c(x_3, 0, -x_1)^T$.*

- *Wir wollen zeigen, dass die Werte von* $\Delta f, \operatorname{div} f$ *und die durch* $\operatorname{rot}\mathbf{v}, \operatorname{grad}\,\mathbf{v}$ *dargestellten Vektoren in einem festen Punkt nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen.*

4.15 Lemma. *Es gilt:*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = (J_f(\mathbf{x}_0))^T \,,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = \operatorname{Sp} J\mathbf{x}_0)\,,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \left(J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) - J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)^T\right)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,.$$

- *Nach Lemma 4.15 ist* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \times \mathbf{x}$ *das Geschwindigkeitsfeld einer Drehung, daher der Name Rotation.*

4.16 Satz. *Sind* $I = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *und* $K = (\mathbf{P}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\mathbf{b}_3)$ *zwei kartesische Koordinatensysteme und ist* $\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$*, und* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ *die Darstellung von* K *bezüglich* I*, so gilt:*

System	I	K
Basis	$\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3), \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}$
Punkt $\mathbf{x}$	$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$	$\mathbf{y}^T = (y_1, y_2, y_3) = (\mathbf{x}^T - \mathbf{p}^T)\mathbf{B}$
Vektor $\overrightarrow{\mathbf{xy}}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{w} = \mathbf{B}^T\mathbf{v}$
Skalarenfeld	$f(\mathbf{x})$	$g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{p})$
$f : D \to \mathbb{R}$	$J_f(\mathbf{x})$	$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) = J_f(\mathbf{x})\mathbf{B}$
Gradient	$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = J_f(\mathbf{x})^T$	$\operatorname{grad} g(\mathbf{y}) = \mathbf{B}^T\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$
Vektorfeld	$\mathbf{v}(\mathbf{x})$	$\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}^T\mathbf{v}(\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{p})$
$\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$	$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$	$J_{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}^T J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\mathbf{B}$
Divergenz	$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x})$	$\operatorname{div}\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x})$
Rotation	$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x})$	$\operatorname{rot}\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}^T\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x})$

4.17 Folgerung. *Der Wert von* $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *und* $\Delta f(\mathbf{x})$ *ist vom Koordinatensystem unabhängig. Dasselbe gilt für die Länge und die Richtung von* $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *und* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$.

4.18 Lemma. *Es gelten folgende Rechenregeln:*

a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$, *b)* $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$,

c) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$,

d) $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{v} + f \operatorname{div}\mathbf{v}$,

e) $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{v} + f \operatorname{rot}\mathbf{v}$,

f) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$.

4.19 Nablakalkül. *Mit dem symbolischen „Vektor“* $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ *(**„Nabla Operator“**) kann man formal schreiben*

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \nabla f, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \Delta f &= \nabla \cdot \nabla f, \\ \operatorname{rot}\mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Der Nablakalkül erlaubt die Formeln aus 4.18 formal zu berechnen. Dies sei am folgenden Beispiel illustriert:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\mathbf{v}) = \nabla \cdot (f\mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\overline{f}\mathbf{v}) + \nabla \cdot (f\overline{\mathbf{v}}) \\ &\quad \textit{umformen bis alle Größen ohne} \\ &\quad \textit{Querstrich links von } \nabla \textit{ stehen} \\ &= \mathbf{v} \cdot \nabla\overline{f} + f\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div}\mathbf{v} \end{aligned}$$

Dabei sind folgende Identitaten sinnvoll

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= 0, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= \|\mathbf{a}\|^2, \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}), \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Kapitel 8

Integration von Funktionen mehrerer Variablen

8.1 Parameterintegrale

Viele Funktionen der höheren Analysis besitzen Integraldarstellungen, die von einem Parameter abhängen, d.h. es gibt eine Darstellung

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy\,. \tag{1.1}$$

wobei x auf der rechten Seite ein Parameter ist. Integrale dieser Form heißen **Parameterintegrale**.
Typische Beispiele sind:

Gammafunktion:	$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$	$x > 0,$
Besselfunktion:	$J_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt,$	$n \in \mathbb{Z},$
Laplace Transformierte:	$F(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\,dt.$	

1.2 Satz. *Sei $D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ein abgeschlossenes Rechteck im $\mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für die*

Integralfunktion

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy, \qquad x \in [a,b],$$

a) *F ist in $[a,b]$ stetig.*

b) *Satz von Fubini*

$$\int_c^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,, \quad (1.3)$$

c) *ist f auf $[a,b]$ stetig partiell nach x differenzierbar, dann ist F differenzierbar mit der Ableitung*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\,. \qquad (1.4)$$

1.5 Satz. *Seien g, h C^1-Funktionen und f stetig partiell nach x differenzierbar. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f_x(x,y)\,dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x)\,.$$

Beispiel: *Sei $x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f(a)\sin(k(t-u))\,du$, mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f(u)\cos(k(t-u))\,du\,,$$

$$\ddot{x}(t) = -k\int_0^t f(u)\sin(k(t-u))\,du - f(t)\,,$$

d.h. x ist eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2x(t) = f(t)\,.$$

- *Falls das Integral in* (1.1) *uneigentlich ist, d.h.*

$$\int_c^d f(x,y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_c^{d-\varepsilon} f(x,y)\,dy$$

oder

$$\int_c^\infty f(x,y)\,dy = \lim_{d\to\infty} \int_c^d f(x,y)\,dy$$

gilt Satz 1.2 nur unter zusätzlichen Voraussetzungen.

1.6 Satz. *Ist f auf dem einseitig offenen Rechteck*

$$D = \{(x,y); a \le x \le b, c \le y < d\}, \quad d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

stetig und stetig partiell nach x differenzierbar und gibt es Funktionen $g,h : [c,d) \to \mathbb{R}$ für die gilt

1) $|f(x,y)| \le g(y), \qquad |f_x(x,y)| \le h(y) \qquad \forall (x,y) \in D,$

2) *Die uneigentlichen Integrale*

$$\int_c^d g(y)\,dy, \quad \int_c^d h(y)\,dy$$

konvergieren.

Dann konvergiert für jedes $x \in [a,b]$ das uneigentliche Integral

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$$

und die so definierte Funktion F hat die Ableitung

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x,y)\,dy\,.$$

8.2 Kurvenintegrale

2.1 Definition. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{w} : [a,b] \to D$ ein Kurvenstück und f ein Skalarenfeld auf dem Kurvenstück, so daß $t \to f(\mathbf{w}(t))$ stetig ist. Dann heißt*

$$\int_{\mathbf{w}} f\, ds := \int_a^b f(\mathbf{w}(t))\, \|\dot{\mathbf{w}}(t)\|\, dt \tag{2.2}$$

das ***Kurvenintegral*** *von f längs $\mathbf{w}$.*

2.3 Interpretation. *Sei $\mathbf{w}(t)$ ein Kurvenstück und f ein skalares Feld. Das Kurvenstück wird durch eine Zerlegung des Parameterintervalls $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ in Bögen über $[t_{i-1}, t_i]$ der Länge*

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\mathbf{w}}(t)\|\, dt = \|\dot{\mathbf{w}}(\tau_i)\|\, \Delta t_i$$

mit $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ zerlegt. Durch

$$\sum_{i=1}^{m} f(\mathbf{w}(\tau_i))\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{w}(\tau_i))\, \|\dot{\mathbf{w}}(\tau_i)\|\, \Delta t_i \tag{*}$$

ist eine Riemann-Summe gegeben, die gegen

$$\int_a^b f(\mathbf{w}(t))\, \|\dot{\mathbf{w}}(t)\|\, dt$$

konvergiert. Andererseits approximiert die linke Seite in (*) das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{w}} f\, ds$ (Vergleiche Kapitel 4, 5.24). Mit Sprechweisen aus Kapitel 4 haben wir:

Gesamtmasse	$M = \int_M dm$	$\hat{=}$ *Summe der Massenelemente,*
Massenelement	$dm = f(\mathbf{w}(t))\, ds$	$\hat{=}$ *Dichte $\times$ Längenelement,*
Längenelement	$ds = \|\dot{\mathbf{w}}(t)\|\, dt$	$\hat{=}$ *gewichtete Parameterelemente.*

Also gilt:

$$M = \int_{\mathbf{w}} dm = \int_{\mathbf{w}} f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{w}(t))\, \|\dot{\mathbf{w}}(t)\|\; dt\,.$$

2.4 Berechnung des Kurvenintegrals. *Wir gehen wie folgt vor um* $I = \int_{\mathbf{w}} f\, ds$ *zu berechnen:*

1) *Das Kurvenstück parametrisieren,*

$$\mathbf{w}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \qquad t \in [a, b]$$

2) *Das Bogenelement bestimmen*

$$ds = \|\dot{\mathbf{w}}\|\; dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

3) *Einsetzen*

$$\int_{\mathbf{w}} f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

und das bestimmte Integral berechnen.

Beispiel:

a) *Sei* $\mathbf{w}$ *eine Schraubenkurve mit* 2 *Umdrehungen und* $\varrho(x, y, z) = x^2 y^2 + z^2$.

Wir wollen $M = \int_{\mathbf{w}} \varrho\, ds$ *berechnen.*

1. *Darstellung der Kurve*

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\sin t, \qquad z = \frac{1}{2}t, \qquad t \in [0, 4\pi]\,.$$

2. *Bogenelement*

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt \\ &= \sqrt{(2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + \frac{1}{4}}\, dt \\ &= \sqrt{\frac{17}{4}}\, dt \end{aligned}$$

3. Einsetzen

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{4\pi} \left\{ (2\cos t)^2 (2\sin t)^2 + \frac{1}{4} t^2 \right\} \frac{\sqrt{17}}{2}\, dt \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \left[16 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} - \frac{3t}{8} + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin 4t}{32} \right) + \frac{t^3}{12} \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \left[2t - \frac{\sin 4t}{32} + \frac{t^3}{12} \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \left(\frac{15}{3} \pi^3 + 8\pi \right) \end{aligned}$$

b) *Für ein Integral längs eines Graphen* $y = g(x)$ *in der Ebene* $z = z_0$ *haben wir:*

- *Parametrisierung:* $\mathbf{w}(x) = (x, g(x), z_0)^T, x \in [a, b]$
- *Bogenelement:* $ds = \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx$
- *Integral:* $\int\limits_{\mathbf{w}} f\, ds = \int\limits_a^b f(x, g(x), z_0) \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx$

2.5 Definition.

a) *Unter einer* ***Kurve*** $\mathbf{w}$ *in* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *verstehen wir eine endliche Folge* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ *von Kurvenstücken* $\mathbf{w}_i : [a_i, b_i] \to D, i = 1, \ldots, k,$ *mit* $\mathbf{w}_i(b_i) = \mathbf{w}_{i+1}(a_{i+1}), 1 \leq i \leq k - 1.$

b) *Für eine aus den Kurvenstücken* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ *bestehende Kurve und für jede stetige Funktion* $f : \cup_{i=1}^k \{\mathbf{w}_i(t), t \in [a_i, b_i]\} \to \mathbb{R}$ *ist das* ***Kurvenintegral*** *von* f *längs* $\mathbf{w}$ *definiert durch*

$$\int\limits_{\mathbf{w}} f\, ds := \sum_{i=1}^k \int\limits_{\mathbf{w}_i} f\, ds$$

- *Für jede Kurve* $\mathbf{w}$ *bestehend aud Kurvenstücken*

$$\mathbf{w}_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, k,$$

gibt es eine durch die Anordnung auf $\mathbb{R}$ *der Parameterintervalle eine „Durchlaufrichtung“. Diese wird mit einem Pfeil gekennzeichnet. Man kann die Kurve auch in umgekehrter Richtung durchlaufen, d.h. man betrachtet die Kurve* $\mathbf{w}^* : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *definiert durch*

$$\mathbf{w}^*(t) := \mathbf{w}(a+b-t)\,.$$

Diese hat den Anfangspunkt $\mathbf{w}^*(a) = \mathbf{w}(b)$ *und den Endpunkt* $\mathbf{w}^*(b) = \mathbf{w}(a)$*. In die Definition des Integrals ist die Richtung nicht eingeflossen. Also gilt:*

$$\int\limits_{\mathbf{w}} f\,ds = \int\limits_{\mathbf{w}^*} f\,ds\,.$$

2.6 Lemma. *Für alle Kurven* $\mathbf{w}$ *in* D*, stetige Funktionen* f, g *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\int\limits_{\mathbf{w}} \alpha f\,ds = \alpha \int\limits_{\mathbf{w}} f\,ds\,,$$

$$\int\limits_{\mathbf{w}} (f+g)\,ds = \int\limits_{\mathbf{w}} f\,ds + \int\limits_{\mathbf{w}} g\,ds\,,$$

$$\int\limits_{\mathbf{w}} f\,ds = f(\tilde{x}) \int\limits_{\mathbf{w}} ds\,.$$

2.7 Anwendungen.

a) ***Bogenlänge:*** *Die Länge* $L(\mathbf{w})$ *eines Kurvenstückes* $\mathbf{w} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *beträgt (Kapitel 7 1.7)*

$$L(\mathbf{w}) = \int\limits_{\mathbf{w}} ds = \int\limits_a^b \|\dot{\mathbf{w}}(t)\|\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt\,.$$

Eine aus den Kurvenstücken $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ *bestehende Kurve* $\mathbf{w}$ *hat somit die Länge*

$$L = \sum_{i=1}^{k} L(\mathbf{w}_i)\,.$$

b) ***Masse:*** *Sei $\varrho(x,y,z)$ die Massendichte einer Kurve $\mathbf{w}$. Dann ist $dm = \varrho\, ds$ das Massenelement und die Gesamtmasse ist*

$$M = \int\limits_{\mathbf{w}} dm = \int\limits_{\mathbf{w}} \varrho(x,y,z)\, ds\,.$$

Analog für eine Ladungsdichte $q(x,y,z)$.

2.8 Definition. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{w} : [a,b] \to D$ eine reguläre Kurve, d.h. $\dot{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}, t \in [a,b]$, und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Man nennt*

$$\int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot\, d\mathbf{x} := \int\limits_a^b \mathbf{v}(\mathbf{w}(t)) \cdot \dot{\mathbf{w}}(t)\, dt$$

das ***Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ längs $\mathbf{w}$****.*

- *Sei $\mathbf{T}(t) := \frac{1}{\|\dot{\mathbf{w}}(t)\|}\dot{\mathbf{w}}(t)$ der Tangenteneinheitsvektor der Kurve $\mathbf{w}$ (Kapitel 7, 1.9). Dann gilt*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot\, d\mathbf{x} &= \int\limits_a^b \mathbf{v}(\mathbf{w}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)\, \|\dot{\mathbf{w}}(t)\|\; dt\,,\\ &= \int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds\,,\end{aligned}$$

wobei $d\mathbf{x}$ das vektorielle Bogenelement, $ds = \|\dot{\mathbf{w}}(t)\|\; dt$ das Bogenelement und $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ die skalare Tangentialkomponente von $\mathbf{v}$ ist.

- *Es gelten folgende Rechenregeln für stetige Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbf{w}} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot\, d\mathbf{x} &= \int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{u} \cdot\, d\mathbf{x} + \int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot\, d\mathbf{x}\,,\\ \int\limits_{\mathbf{w}} (\alpha\mathbf{v}) \cdot\, d\mathbf{x} &= \alpha \int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot\, d\mathbf{x}\,,\\ \int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot\, d\mathbf{x} &= -\int\limits_{\mathbf{w}^*} \mathbf{v} \cdot\, d\mathbf{x}\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$