- *Analog zu Definition 2.6 werden Kurvenintegrale von Vektorfeldern längs stückweise regulärer Kurven definiert.*
- *Man nennt eine Kurve* ***geschlossen****, wenn der Anfangspunkt mit dem Endpunkt zusammenfällt. In diesem Falle schreiben wir:*

$$\oint_{\mathbf{w}} f\,ds \qquad \oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}$$

2.10 Berechnung des Kurvenintegrals im $\mathbb{R}^3$.

Zur Berechnung des Kurvenintegrals $A = \int_{\mathbf{w}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}$ *gehen wir wie folgt vor:*

1) Das Kurvenstück parametrisieren

$$\mathbf{w}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \qquad t \in [a, b]\,.$$

2) Das vektorielle Bogenelement berechnen

$$d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{w}}(t)\,dt = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^T\,dt$$

3) Einsetzen

$$A = \int_a^b v_1(\mathbf{w}(t))\dot{x}(t) + v_2(\mathbf{w}(t))\dot{y}(t) + v_3(\mathbf{w}(t))\dot{z}(t)\,dt$$

und ausrechnen.

Beispiel: *Ein Wirbel im $\mathbb{R}^2$ (siehe Kapitel 7 4.12) hat die Darstellung:*

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \neq (0, 0)\,.$$

Das Integral des Wirbels längs des positiv durchlaufenen Einheitskreises $\mathbf{w}$ *um* $(0, 0)^T$ *berechnet sich wie folgt:*

1. $x = \cos t, y = \sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$
2. $d\mathbf{x} = (-\sin t, \cos t)^T\,dt$

3.

$$
\begin{aligned}
A &= \oint\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot \, d\mathbf{x} \,, \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \left(-\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cos t\right) \, dt \,, \\
&= 2\pi \,.
\end{aligned}
$$

2.11 Anwendungen.

a) ***Arbeit.*** *Die von einer Kraft* $\mathbf{K}$ *im Kurvenpunkt* $\mathbf{w}(t)$ *längs des Weges* $d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{w}}(t)\, dt$ *geleistete Arbeit beträgt* $dA = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}\, ds$. *Also ist die Arbeit von* $\mathbf{K}$ *längs* $\mathbf{w}$ *gegeben durch*

$$
A = \int\limits_{\mathbf{w}} dA = \int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{K} \cdot \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \, ds \,.
$$

In einem elektrischen Spannungsfeld $\mathbf{E}$ *liefert das „negative Arbeitsintegral“ den Spannungsabfall längs* $\mathbf{w}$. *Also gilt*

$$
U = -\int\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{E} \cdot \, d\mathbf{x} \,.
$$

b) ***Zirkulation und Fluss.*** *In der Strömungsmechanik heißt das Integral eines Geschwindigkeitsfeldes* $\mathbf{v}$ *längs einer geschlossenen Kurve* $\mathbf{w}$

$$
\oint\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot \, d\mathbf{x} = \oint\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds
$$

die ***Zirkulation*** *von* $\mathbf{v}$ *längs* $\mathbf{w}$. *Liegt* $\mathbf{w}$ *in einer Ebene, so bezeichnet man das Integral über die skalare Normalenkomponente von* $\mathbf{v}$ *als* ***Fluss*** *des Feldes* $\mathbf{v}$ *durch* $\mathbf{w}$*:*

$$
\oint\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot \, d\mathbf{n} := \oint\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \,,
$$

wobei $\mathbf{n}$ *der **äußere Normalenvektor** ist. Dieser entsteht aus* $\mathbf{T}$ *durch eine Drehung um* $-90°$*. Sei* $\mathbf{w}(t) = (x(t), y(t))^T$ *dann ist* $\mathbf{T}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T, \mathbf{n}(t) = \frac{1}{||\mathbf{T}(t)||}(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))^T$*. Der Mittelwertsatz liefert:*

$$\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \left(\mathbf{v}(\hat{t}) \cdot \mathbf{T}(\hat{t})\right) L\,,$$

$$\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{n} = \left(\mathbf{v}(\tilde{t}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{t})\right) L\,,$$

d.h. die Zirkulation längs $\mathbf{w}$ *ist die mittlere skalare Tangentialkomponente multipliziert mit der Länge von* $\mathbf{w}$ *und der Fluß längs* $\mathbf{w}$ *die mittlere skalare Normalenkomponente multipliziert mit der Länge von* $\mathbf{w}$.

Beispiel: *Für die ebene Gegenströmung* $\mathbf{v} = (cy, 0), c > 0$ *und den positiv durchlaufenen Kreis* $\mathbf{w}(t) = (\cos t, 1 + \sin t)^T, t \in [0, 2\pi]$ *gilt:*

a)

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} c(1+\sin t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= c\left[\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = -c\pi\,.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{n} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} c(1+\sin t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= c\left[\sin t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

a) Die mittlere Tangentialkomponente ist $-\frac{c}{2}$*, d.h. die Strömung erfolgt überwiegend im Uhrzeigersinn.*

b) Der Fluss ist Null, d.h. soviel wie hineinfließt fließt auch wieder heraus, d.h. die Strömung ist quellenfrei ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$)*.*

2.12 Definition. *Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet**, wenn gilt:*

1. *G ist **offen**, d.h. für alle $\mathbf{x}_0 \in G$ existiert eine ε-Umgebung $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ so, dass $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subseteq G$,*

2. *G ist **zusammenhängend**, d.h. zu je zwei Punkten $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in G$ gibt es eine reguläre Kurve $\mathbf{w} : [a,b] \to G$ mit $\mathbf{w}(a) = \mathbf{x}_0, \mathbf{w}(b) = \mathbf{y}_0$.*

2.13 Definition. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man nennt ein Vektorfeld $\mathbf{v} \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ **konservativ** oder ein **Potential-** bzw. **Gradientenfeld**, wenn es eine Funktion $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ gibt, mit*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in G\,.$$

*In diesem Fall heißt f **Stammfunktion** und $U := -f$ ein **Potential** von $\mathbf{v}$.*

- *Falls $n = 1$ wissen wir, dass*

$$\int_0^x f'(x)\,dx \tag{*}$$

eine Stammfunktion von $f'(x)$ ist. Im allgemeinen Fall $G \subseteq \mathbb{R}^n$ wird das Integral in (*) durch ein Kurvenintegral ersetzt.

- *In einem konservativen Kraftfeld ist das Potential die potentielle Energie.*

- *Für jede durch ein konservatives Kraftfeld $\mathbf{K} = -\operatorname{grad} U$ hervorgerufene Bewegung $\mathbf{x}(t)$ leitet man aus den **Newtonschen Bewegungsgleichungen** die Energieerhaltung ab:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{K} = m\ddot{\mathbf{x}} - \operatorname{grad} U\,, \\
0 &= m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \operatorname{grad} U \cdot \dot{\mathbf{x}}\,, \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + U(\mathbf{x}(t))\right)\,,
\end{aligned}$$

d.h. die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist konstant.

2.14 Satz. *Ist* $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^n$ *ein stetiges Potentialfeld auf dem Gebiet* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit dem Potential* f*, dann gilt für jede stückweise reguläre Kurve* $\mathbf{w}$ *in* G *mit Anfangspunkt* $\mathbf{w}(a)$ *und Endpunkt* $\mathbf{w}(b)$*:*

$$\int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{w}(b)) - f(\mathbf{w}(a)) .$$

2.15 Satz. *Für ein Vektorfeld* $\mathbf{v} \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ *auf einem Gebiet* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *sind äquivalent:*

a) $\mathbf{v}$ *ist ein Potentialfeld,*

b) Für alle regulären Kurven $\mathbf{w}$ *in* G *hängt* $\int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$ *nur vom Anfangs- und Endpunkt von* $\mathbf{w}$ *ab. Man sagt, das Integral ist* ***wegunabhängig****.*

c) Für geschlossene reguläre Kurven $\mathbf{w}$ *in* G *gilt*

$$\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0 .$$

- *Wir suchen ein praktisches Kriterium, um für ein gegebenes* C^1 *Vektorfeld* v *zu entscheiden ob es ein Potentialfeld ist. Nahe eines Punktes* $\mathbf{x} \in G$ *kann man dies direkt aus der Jacobi Matrix* $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right)$ *ablesen, für das gesamte Gebiet braucht man mehr.*

2.16 Definition. *Ein Gebiet* $G \in \mathbb{R}^n$ *heißt* ***einfach zusammenhängend****, wenn jede geschlossene doppelpunktfreie Kurve in* G *stetig auf einem Punkt in* G *zusammengezogen werden kann, ohne dass* G *verlassen wird.*

• *Im* $\mathbb{R}^2$ *sind Gebiete ohne Loch einfach zusammenhängend und Gebiete mit Loch nicht einfach zusammenhängend. Dasselbe gilt im* $\mathbb{R}^3$ *für Gebiete mit bzw. ohne „Henkel“ z.B. Tassen. Ein Gebiet bleibt einfach zusammenhängend, wenn man endlich viele Punkte herausnimmt, z.B.* $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$*. Wenn man allerdings eine Gerade herausnimmt, ist es nicht mehr einfach zusammenhängend, z.B.* $\mathbb{R}^3 \setminus$ *Gerade.*

2.17 Satz. *Ein C^1-Vektorfeld $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^n$ auf dem einfach zusammenhängeden Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die* ***„Integrabilitätsbedingung"***

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^T$$

für alle $\mathbf{x} \in G$ erfüllt ist.

Gegenbeispiel: *Sei $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und $\mathbf{v} = (x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ein Wirbel. Es gilt: $\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, aber $\mathbf{v}$ besitzt auf G* ***kein*** *Potential! Wenn dem so wäre, müsste nach Satz 2.15 für einen Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0$ gelten. Aber das Beispiel nach 2.10 liefert*

$$\oint\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi \neq 0\,.$$

2.18 Folgerung. *Ein C^1-Vektorfeld $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn* $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *für alle $\mathbf{x} \in G$.*

2.19 Berechnung des Potentials. *Sei $\mathbf{v}$ ein C^1-Vektorfeld definiert auf $G \subseteq \mathbb{R}^3$.*

- *Überprüfe ob* $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$. *Falls es ein $\mathbf{x} \in G$ gibt mit* $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *dann hat $\mathbf{v}$ kein Potential.*

- *Falls* $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *und G einfach zusammenhängend, dann wählt man ein $\mathbf{x}_0 \in G$ und für beliebige $\mathbf{x} \in G$ eine $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}$ verbindende Kurve. Dann ist*

  $$f(\mathbf{x}) := \int\limits_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

  ein Potential.

  Man sollte die Wege so einfach wie möglich wählen:

– *Strecke* $\mathbf{w}(t) := \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $0 \le t \le 1$, *falls sie in* G *verläuft. Dann gilt:*

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\, dt\,.$$

– *Streckenzug parallel zu den Koordinatenachsen, z.B.*

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} v_1(t, y_0, z_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} v_2(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} v_3(x, y, t)\, dt\,.$$

2.20 Ansatzmethode. *Man kann die 3 Differentialgleichungen* $\operatorname{grad} f = \mathbf{v}$ *durch dreimaliges unbestimmtes Integrieren lösen.*

a) *Überprüfe ob* G *einfach zusammenhängend ist. Mache den Ansatz* $f_x = v_1, f_y = v_2, f_z = v_3$.

b) *Unbestimmte Integration nach* x $(y, z$ *fest) von* v_1 *liefert*

$$f(x,y,z) = \int v_1(x,y,z)\, dx + c(y,z)\,, \tag{*}$$

wobei die „Integrationskonstante“ c *von* y *und* z *abhängt.*

c) (*) *nach* y *ableiten und durch Ansatz* $f_y = v_2$ *eine Gleichung für* $c_y(y,z)$ *herleiten, d.h.:*

$$\frac{\partial}{\partial y} \int v_1(x,y,z)\, dx + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = \frac{\partial f}{\partial y} = v_2\,. \tag{+}$$

Tritt in der Gleichung für c *noch* x *explizit auf dann ist* $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *und* $\mathbf{v}$ *besitzt kein Potential.*

d) *Durch unbestimmte Integration nach* y *nun* $c(y,z)$ *bestimmen, d.h.:*

$$c(y,z) = \int h(y,z)\, dy + q(z)\,,$$

wobei $h(y,z) = v_2 - \int \partial_y v_1 \, dx$ *und die „Integrationskonstante" q von z abhängt. Das Ergebnis in (*) eingesetzt liefert:*

$$f(x,y,z) = \int v_1(x,y,z)\, dx + \int h(y,z)\, dy + q(z) \qquad (**)$$

e) *Eine Gleichung für $q(z)$ aus (**) durch Ableitung nach z herleiten, d.h.:*

$$\frac{\partial}{\partial z}\int v_1(x,y,z)\, dx + \frac{\partial}{\partial z}\int h(y,z)\, dy + q'(z) = v_3\,. \qquad (++)$$

Tritt in der Gleichung für q noch y explizit auf, so ist $\operatorname{rot}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *und* $\mathbf{v}$ *besitzt kein Potential.*

f) *Berechne $q(z)$ durch unbestimmte Integration von (++) nach z. Einsetzen des Ergebnisses in (**) liefert das Potential.*

Beispiele:

a) ***Zentralkraftfelder*** *haben die Form*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|)(\mathbf{x}-\mathbf{z})\,,$$

mit einer Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\},\mathbb{R})$, die meist in „0" einen Pol hat. $\mathbf{v}$ *ist auf $\mathbb{R}^3\backslash\{z\}$ ein C^1-Vektorfeld. Wir setzen der Einfachheit halber $z=0$, d.h.*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}\,.$$

Da $G = \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist und nach Kapitel 7 Lemma 4.6 gilt

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \varphi'(\|\mathbf{x}\|)\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}{\|\mathbf{x}\|} + \varphi(\|\mathbf{x}\|)\mathbf{E} = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^T\,,$$

besitzt $\mathbf{v}$ *ein Potential. Berechnung nach 2.19:*
Sei $\mathbf{x}_0$ *fest und* $\mathbf{x}$ *beliebig. Der Integrationsweg* $\mathbf{w}$ *besteht aus zwei Stücken* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. $\mathbf{w}_1$ *ist ein Teil der Sphäre um den Nullpunkt mit*

dem Radius $\|\mathbf{x}_0\|$ *der* $\mathbf{x}_0$ *und* $\mathbf{x}_1 = \frac{\|\mathbf{x}_0\|}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$ *verbindet.* $\mathbf{w}_2$ *ist die Strecke* $\mathbf{w}_2(t) = t\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \|\mathbf{x}_0\| \leq t \leq \|\mathbf{x}\|$. *Es gilt* $\mathbf{v}(\mathbf{w}_1(t)) \cdot \dot{\mathbf{w}}_1(t) = 0$

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{w}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\|\mathbf{x}\|} \varphi(t) t \, dt \, .$$

Sei $\varphi(t) = \frac{1}{t^3}$, *d.h.* φ *ist das Newton Potential, dann gilt:*

$$U(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}) = -\int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\|\mathbf{x}\|} \frac{t}{t^3} \, dt = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}_0\|} \, .$$

b) *Sei*

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \cos x \\ 2y \sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} \end{pmatrix}, \quad G = \mathbb{R}^3 \, .$$

G ist einfach zusammenhängend. Also können wir das Potential nach 2.20 berechnen:

a) $f_x = y^2 \cos x$, $f_y = 2y \sin x + e^{2z}$, $f_z = 2ye^{2z}$.

b)

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int y^2 \cos x \, dx + c(y, z) \\ &= y^2 \sin x + c(y, z) \, . \end{aligned}$$

c) *Die Gleichung für* $c(y, z)$ *lautet* $f_y = 2y \sin x + c_y(y, z) = 2y \sin x + e^{2z}$ *woraus folgt*

$$c_y(y, z) = e^{2z} \, .$$

d) *Somit haben wir* $c(y, z) = ye^{2z} + q(z)$ *und erhalten*

$$f(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + q(z) \, .$$

e) Die Gleichung für q lautet

$$q'(z) + 2ye^{2z} = 2ye^{2z}\,,$$

woraus folgt $q'(z) = 0$, also $q(z) = const.$ Also ist

$$f(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + const.$$

ein Potential von $\mathbf{v}$.

8.3 Integration über ebene Bereiche

3.1 Der Flächeninhalt. *Der Flächeninhalt von Mengen im $\mathbb{R}^2$ wird durch Zerlegung auf Flächeninhalte von Rechtecken zurückgeführt. Sei $k \in \mathbb{N}$. Durch das Gitter achsenparalleler Koordinatenlinien*

$$x = n \times 2^{-k}, \quad y = n \times 2^{-k}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,,$$

wird die (x, y)-Ebene in Quadrate mit dem Flächeninhalt 2^{-2k} zerlegt. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige beschränkte Menge. Sei $s_k(M)$ die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate, die einschließlich des Randes in M liegen und $S_k(M)$ der Flächeninhalt der Quadrate die mindestens einen Punkt aus M enthalten. Dann gilt:

$$s_k(M) \le s_{k+1}(M), \quad s_k(M) \le S_k(M), \quad S_{k+1}(M) \le S_k(M)\,.$$

Also sind $s_k(M)$ und $S_k(M)$ monotone Folgen, und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} s_k(M) =: F_i(M) \le F_a(M) := \lim_{k\to\infty} S_k(M)\,,$$

wobei $F_i(M)$ der innere Inhalt von M und $F_a(M)$ der äußere Inhalt von M ist.

3.2 Definition. *Man nennt eine beschränkte Menge M des $\mathbb{R}^2$* ***Riemann-messbar****, wenn $F_i(M) = F_a(M)$ gilt. In diesem Falle ist $F(M) = F_i(M) = F_a(M)$ der* ***Flächeninhalt*** *von M.*

- *$M = \{(x, y); x, y \in [0, 1], x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist* ***nicht*** *Riemann-messbar, da $F_i(M) = 0$ und $F_a(M) = 1$.*

3.3 Lemma. *Ein beschränktes Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ mit stückweise regulärem Rand ist Riemann-messbar.*

- *Sei M Riemann-messbar und N bestehe aus endlich vielen Punkten und endlich vielen regulären Kurvenstücken. Dann gilt:*

$$F(M) = F(M \cup N) = F(M \backslash N)\,. \tag{3.4}$$

*Insbesondere gilt: $F(N) = 0$ und N heißt **Nullmenge**.*

3.5 Definition. *Ein Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **regulär**, wenn*

a) der Rand ∂B aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht,

b) das Innere $B \backslash \partial B$ ein nicht leeres, beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^2$ ist,

c) B abgeschlosen ist, d.h. $\partial B \subseteq B$.

- *Wir werden Integrale über reguläre Mengen B oder Mengen der Form $B \backslash N$, wobei N ein Nullmenge und B eine reguläre Menge ist, einführen.*

3.6 Das Doppelintegral. *Sei B eine reguläre Menge und $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf $B \backslash N$ stetig ist. Durch ein Netz regulärer Kurven wird B in n Teilbereiche $B_1, \dots, B_n$ zerlegt, die Riemann-messbar mit dem Inhalt $\Delta F_i, i = 1, \dots, n$ sind. Jedes B_i hat einen Durchmesser $\delta(B_i) := \inf\{B_r(a), B_r(a) \supseteq B_i\}$. Für jedes B_i wählen wir einen beliebigen Punkt $(x_i^*, y_i^*) \in B_i$ und bilden die **Riemann-Summe***

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta F_i\,. \tag{3.7}$$

Wie im eindimensionalen Fall lässt sich zeigen, dass die Riemann-Summen Z_n gegen einen Grenzwert konvergieren, wenn

$$\delta_{max} := max\,\{\delta(B_i), i = 1, \dots, n\}$$

*gegen Null strebt. Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Zerlegung von B und wird als **Doppelintegral** bezeichnet, d.h.*

$$\iint\limits_B f\,dF := \lim_{\substack{\delta_{\max}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta F_i\,. \tag{3.8}$$

Das Symbol dF heißt Flächenelement. Wegen (3.4) *hat die Nullmenge N keinen Einfluss auf die rechte Seite von* (3.8) *und deshalb gilt:*

$$\iint\limits_{B} f\,dF = \iint\limits_{B\setminus N} f\,dF\,. \tag{3.9}$$

3.10 Integration.

a) ***Flächeninhalt****: Mit* $f(x,y) = 1$ *ist jede Riemann-Summe* (3.7) *gleich dem Flächeninhalt von B, d.h.*

$$F = \iint\limits_{B} dF\,.$$

b) ***Volumen****: Ist* $f(x,y) \geq 0$ *für alle* $(x,y) \in B$*, dann ist*

$$v = \iint\limits_{B} f(x,y)\,dF$$

das Volumen des senkrecht auf der (x,y)*-Ebene stehenden Zylinderabschnitts mit der Grundfläche B und der Deckfläche* $z = f(x,y)$*. Die Summanden in* (3.7) *sind gerade die Volumen der Zylinder mit Grundfläche* B_i *und Höhe* $f(x_i^*, y_i^*)$*, die das Gesamtvolumen approximieren.*

3.11 Lemma. *Es gelten folgende Rechenregeln:*

a) $$\iint\limits_{B} (\alpha f + \beta g)\,dF = \alpha \iint\limits_{B} f\,dF + \beta \iint\limits_{B} g\,dF,$$

b) $$f(x,y) \leq g(x,y) \quad \Rightarrow \quad \iint\limits_{B} f\,dF \leq \iint\limits_{B} g\,dF,$$

c) $$\iint\limits_{B} f\,dF = \iint\limits_{B_1} f\,dF + \iint\limits_{B_2} f\,dF,$$

falls B durch eine stückweise reguläre Kurve in zwei Bereichen B_1 *und* B_2 *zerlegt wird.*

- Als **Mittelwert** der Funktion f auf B bezeichnet man die Zahl

$$\frac{1}{F}\iint\limits_B f\,dF\,,$$

wobei $F = \iint\limits_B dF$ der Inhalt von B ist.

3.12 Satz. *Ist B zusammenhängend und abgeschlossen, dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $f : B \to B$ einen Punkt $(x^*, y^*) \in B$ mit*

$$\frac{1}{F}\iint\limits_B f\,dF = f(x^*, y^*)\,.$$