- *Als **Mittelwert** der Funktion f auf B bezeichnet man die Zahl*

$$\frac{1}{F}\iint\limits_B f\,dF\,,$$

wobei $F = \iint\limits_B dF$ der Inhalt von B ist.

3.12 Satz. *Ist B zusammenhängend und abgeschlossen, dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $f : B \to B$ einen Punkt $(x^*, y^*) \in B$ mit*

$$\frac{1}{F}\iint\limits_B f\,dF = f(x^*, y^*)\,.$$

- *Bei einer achsenparallelen Zerlegung der (x, y) Ebene entstehen Rechtecke der Seitenlängen $\Delta x, \Delta y$ mit Flächeninhalt $\Delta F = \Delta x \Delta y$. Für die Riemann Summen einer derartigen Zerlegung schreibt man*

$$\iint\limits_B f\,dx\,dy := \iint\limits_B f\,dF \tag{3.13}$$

und nennt $dx\,dy$ das Flächenelement in kartesischen Koordinaten.

- *Für viele Gebiete lässt sich die Berechnung eines Doppelintegrals auf zwei Berechnungen von „Einfachintegralen“ zurückführen.*

3.14 Definition. *Wir nennen $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ einen **Normalbereich** vom Typ 1, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ und C^1-Funktionen $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x) \leq h(x)$ und*

$$B_1 = \{(x, y); a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}\,.$$

Ein Normalbereich vom Typ 2 hat die Form

$$B_2 = \{(x, y); l(y) \leq x \leq r(y), c \leq y \leq d\}$$

mit $c, d \in \mathbb{R}$ und C^1-Funktionen $l, r : [c, d] \to \mathbb{R}$ mit $l(y) \leq r(y)$.

3.15 Satz.

a) Für jede stetige Funktion $f : B_1 \to \mathbb{R}$ auf einem Normalbereich vom Typ 1 gilt:

$$\iint\limits_{B_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

b) Für jede stetige Funktion $f : B_2 \to \mathbb{R}$ auf einem Normalbereich vom Typ 2 gilt:

$$\iint\limits_{B_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{l(y)}^{r(y)} f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

- Ein stückweise durch Graphen berandeter Integrationsbereich B wird durch achsenparallele Schnitte in Normalbereiche $B_1, \ldots, B_n$ zerlegt. Damit haben wir:

$$\iint\limits_B f\,dF = \sum_{i=1}^n \iint\limits_{B_i} f\,dF\,.$$

- Besitzt B sowohl eine Darstellung als Normalbereich vom Typ 1 als auch vom Typ 2, dann gilt

$$\iint\limits_B f\,dF = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f\,dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{l(y)}^{r(y)} f\,dx \right) dy\,. \qquad (*)$$

  Im Spezialfall eines Rechteckes ist (*) nichts anderes als der Satz von Fubini (Satz 1.2b).

- Aus Satz 3.15a) folgt sofort eine Formel für den Flächeninhalt eines Normalbereiches, nämlich

$$F = \iint\limits_B dF = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} dy\,dx = \int\limits_a^b \big(h(x) - g(x)\big)\,dx\,.$$

Beispiel: B sei von $y = x,\ xy = 1$ und $y = z$ berandet.

a) Der Flächeninhalt: Darstellung als ein Normalgebiet vom Typ 2

$$B = \{(x,y); 1 \leq y \leq 2, \frac{1}{y} \leq x \leq y\}$$

$$F = \int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{y} dx\,dy = \int_1^2 y - \frac{1}{y}\,dy = \frac{y^2}{2} - \ln y \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

b) Das Volumen des Zylinders mit der Grundfläche B und der Deckfläche $z = \frac{x^2}{y^2}$ berechnet sich durch:

$$V = \int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 y^2 \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{y}}^{x=y} dy$$

$$= \int_1^2 -y + y^3\,dy = \frac{9}{4}$$

3.16 Anwendungen. *Sei $f : B \to B$ eine Belegungsfunktion. Mit den Sprechweisen aus Kapitel 4 haben wir folgendes Vorgehen:*

1) *Zerlegung von B in Flächenelemente dF,*

2) *Das Flächenelement im Punkt (x, y) trägt die Belegung $dM = f(x, y)\,dF$,*

3) *Gesamtbelegung von B ist*

$$M = \iint_B dM = \iint_B f(x,y)\,dF\,.$$

a) ***Ladung*** *Die Ladung einer Platte B mit Ladungsdichte $\varepsilon(x, y)$ ist*

$$Q = \iint_B \varepsilon(x,y)\,dx\,dy\,.$$

b) ***Massenmittelpunkt*** *Ein Flächenelement dF besitzt bei der Massendichte $\mu(x,y)$ die Masse $dM = \mu\, dF$. Die* ***axialen Momente*** *sind $x\mu\, dF$ bzw. $y\mu\, dF$, d.h.*

$$M_x = \iint\limits_B x\mu(x,y)\, dF, \quad M_y = \iint\limits_B y\mu(x,y)\, dF\,.$$

Der ***Massenmittelpunkt*** *der Fläche B ist derjenige Punkt $\mathbf{S} = (x_s, y_s)^T$, in dem eine Punktmasse der Größe $M = \iint \mu\, dF$ dieselben Momente besitzt wie B, d.h.*

$$x_S = \frac{1}{M}\iint\limits_B x\mu(x,y)\, dF, \quad y_S = \frac{1}{M}\iint\limits_B y\mu(x,y)\, dF\,. \tag{3.17}$$

Der ***geometrische Schwerpunkt*** *$\overline{\mathbf{S}} = (\overline{x}, \overline{y})^T$ ergibt sich aus (3.17) mit $\mu(x,y) = \mu_0 = const.$, d.h.*

$$\overline{x} = \frac{1}{F}\iint\limits_B x\, dF, \quad \overline{y} = \frac{1}{F}\iint\limits_B y\, dF\,.$$

Beispiel: *Sei B begrenzt durch $x = 2, y = 1$ und $y = x^2$. Die Massenverteilung sei $\mu(x,y) = x^2 + y^2$ bzw. $\mu(x,y) = 1$. B ist ein Normalbereich mit der Darstellung $B = \{(x,y); 1 \le x \le 2, 1 \le y \le x^2\}$*

$$M = \iint\limits_B x^2 + y^2\, dx\, dy = \int\limits_2^1 \int\limits_1^{x^2} x^2 + y^2\, dy\, dx = \int\limits_1^2 yx^2 + \frac{1}{3}y^3 \Big|_1^{x^2} dx$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{1}{3}x^6 + x^4 - x^2 - \frac{1}{3}\, dx = \frac{1006}{105}$$

$$M_x = \int\limits_1^2 \int\limits_1^{x^2} x^3 + xy^2\, dy\, dx = \int\limits_1^2 yx^3 + \frac{1}{3}xy^3 \Big|_1^{x^2} dx$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{1}{3}x^7 + x^5 - \frac{1}{3}x - x^3\, dx = \frac{135}{8}$$

Analog gilt

$$M_y = \iint\limits_B yx^2 + y^3 \, dx \, dy = \frac{2753}{126} \, .$$

Für den geometrischen Schwerpunkt haben wir

$$F = \int_1^2 x^2 - 1 \, dx = \frac{1}{3}x^3 - x \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$\overline{x} = \frac{3}{4}\int_1^2 \int_1^{x^2} x \, dy \, dx = \frac{3}{4}\int_1^2 xy\Big|_1^{x^2} dx = \frac{3}{4}\int_1^2 x^3 - x \, dx = \frac{27}{16}$$

$$\overline{y} = \frac{3}{4}\int_1^2 \int_1^{x^2} y \, dy \, dx = \frac{3}{4}\int_1^2 \frac{1}{2}y^2\Big|_1^{x^2} dx = \frac{3}{4}\int_1^2 \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2} \, dx = \frac{39}{20}$$

- *Sei B ein regulärer Bereich, dessen Rand ∂B aus endlich vielen geschlossenen stückweise glatten Kurven $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ besteht. Die Parametrisierung sei so, dass B stets* ***links*** *zur Durchlaufrichtung liegt.Das Integral eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ über ∂B ist*

$$\int\limits_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{w}_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \, .$$

3.18 Satz (Green). *Seien B und ∂B wie oben beschrieben und $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge mit $B \subseteq D$, dann gilt für jedes C^1-Vektorfeld $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$:*

$$\int\limits_{\partial B} \mathbf{v} \cdot dx = \iint\limits_B \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx \, dy \, .$$

- ***Sonderfälle:*** *Mit $v_1 = 0, v_2 = x$ bzw. $v_2 = 0, v_1 = -y$ ergibt sich aus Satz 3.18 eine Formel für den Flächeninhalt:*

$$F = \iint\limits_B dx \, dy = \int\limits_{\partial B} x \, dy = -\int\limits_{\partial B} v \, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial B} x \, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial B} y \, dx \, ,$$

und für den geometrischen Schwerpunkt gilt:

$$\overline{x} = -\frac{1}{F}\int\limits_{\partial B} xy\,dx = \frac{1}{2F}\int\limits_{\partial B} x^2\,dy\,,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{F}\int\limits_{\partial B} xy\,dy = -\frac{1}{2F}\int\limits_{\partial B} y^2\,dx\,,$$

wobei Satz 3.18 mit $v_1 = 0, v_2 = \frac{x^2}{2}$ *bzw.* $v_1 = -\frac{y^2}{2}, v_2 = 0$ *benutzt wurde.*

3.19 Satz (Gauß in der Ebene). *Ist* $\mathbf{u} \in C^2(D, \mathbb{R}^2)$, *so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 3.18*

$$\iint\limits_B \Delta\mathbf{u}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial B} \partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u}\,dx\,,$$

wobei $\mathbf{n}$ *der äußere Normaleneinheitsvektor ist.*

Beispiel: *Sei* B *begrenzt durch die Strecke* $\dot{\mathbf{w}}_1(t) = (t,0)^T$, $0 \le t \le 2\pi a$ *und die Zykloide* $\mathbf{w}_2(t) = a\,(2\pi - t + \sin t, 1 - \cos t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$. *Wir wollen den geometrischen Mittelpunkt berechnen.*

$$\begin{aligned} F = -\int\limits_{\partial B} y\,dx &= -a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)(-1+\cos t)\,dt + \int\limits_0^{2\pi a} 0\,dt \\ &= a^2\left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{2\pi} \\ &= a^2 3\pi\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B} x^2\,dy &= a^3\int\limits_0^{2\pi}(2\pi - t + \sin t)^2\sin t\,dt + \int\limits_0^{2\pi a} 0\,dt \\ &= a^3\int\limits_0^{2\pi} 4\pi^2\sin t - 4\pi t\sin t - 2t\sin^2 t + \sin^3 t + t^2\sin t + 4\pi\sin^2 t\,dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^3 \Big[-4\pi^2 \cos t - 4\pi \sin t + 4\pi t \cos t - \frac{t^2}{2} - t\frac{\sin 2t}{2} + \frac{\cos^2 t}{2} \\
&\quad - \cos t + \frac{\cos^2 t}{2} t^2 \cos t + 2\cos t + 2t \sin t + 2\pi t - \pi \sin 2t \Big]_0^{2\pi} \\
&= 6\pi^2 a^3 .
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$\overline{x} = \frac{1}{2F} \int_{\partial B} x^2 \, dy = \pi a .$$

Analog haben wir:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B} y^2 \, dx &= a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 (-1) \, dt + \int_0^{2\pi a} 0 \, dt \\
&= -a^3 \left[\frac{5}{2} t - \frac{11}{3} \sin t + \frac{3}{2} \cos t \sin t - \frac{1}{3} \cos^2 t \sin t \right]_0^{2\pi} \\
&= -a^3 5\pi ,
\end{aligned}
$$

und demzufolge

$$\overline{y} = -\frac{1}{2F} \int_{\partial B} y^2 \, dx = \frac{5}{6} a .$$

8.4 Integration über Flächen im Raum

- Flächen im Raum können als Graph $z = h(x, y)$ oder implizit durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellt werden. Eine weitere Möglichkeit ist die stetige Verformung einer Fläche in der Ebene.

4.1 Definition. *Sei D ein regulärer Bereich in einem Gebiet G der (u, v)-Ebene. Unter der **Parameterdarstellung** eines **regulären** Flächenstücks verstehen wir die Einschränkung einer C^1-Funktion $\mathbf{x} : G \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$ auf D mit den Eigenschaften:*

1) $(u,v) \neq (u',v')$ *in* D, $\Rightarrow \mathbf{x}(u,v) = \mathbf{x}(u',v')$,

2) $\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v) \neq \mathbf{0}$ *für alle* $(u,v) \in D$.

Die Punktmenge $S = \{\mathbf{x}(u,v); (u,v) \in D\}$ *ist das dargestellte Flächenstück.*

- Aus 1) folgt: $\forall (x,y,z) \in S \quad \exists! (u,v) \in D : (x,y,z)^T = \mathbf{x}(u,v)$.
- Durch die Abbildungen

$$\begin{aligned} u &\to \mathbf{x}(u,v) & v &= const.\,, \\ v &\to \mathbf{x}(u,v) & u &= const. \end{aligned}$$

  sind **Parameterlinien** $v = const.$, bzw. $u = const.$ gegeben.

- Aus 2) folgt, dass die Tangentialvektoren der Parameterlinien in jedem Punkt $(u,v) \in D$ linear unabhängig sind.
- Die Tangentialvektoren $\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)$ spannen im Flächenpunkt $\mathbf{x}(u,v)$ die Tangentialebene auf, die die Parameterdarstellung

$$v(\lambda,\mu) = \mathbf{x}(u,v) + \lambda\, \mathbf{x}_u(u,v) + \mu\, \mathbf{x}_v(u,v)$$

  hat. Der auf der Tangentialebene senkrecht stehende Vektor

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \tag{4.2}$$

  heißt **Flächennormale**.

- Ein regläres Kurvenstück $t \to (u(t), v(t)), t_0 \leq t \leq t_1$ im Parameterbereich D induziert durch

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

  eine reguläre Flächenkurve in S, deren Tangentialvektor $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v}$ in der Tangentialebene durch $\mathbf{x}(u,v)$ liegt.

- Die Bogenlänge

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\mathbf{w}}(t)\| \; dt$$

ergibt sich wegen

$$\|\dot{\mathbf{w}}\|^2 = \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)\dot{u}^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)\dot{u}\dot{v} + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)\dot{v}^2$$

aus den **metrischen Fundamentalgrößen**

$$E := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \qquad F := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \qquad G := \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v\,.$$

Diese bestimmen auch die Winkelmessung (Seien $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ zwei reguläre Flächenkurven, die sich in einem Punkt $\mathbf{x}(u,v)$ schneiden. Der Winkel zwischen den beiden Flächenkurven ist der Winkel zwischen den beiden Tangentialvektoren), und die Flächeninhalte (siehe 4.7). Aufgrund von $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ gilt

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 \tag{4.3}$$

- Wenn sich in jedem Flächenpunkt $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ die Parameterlinien $u = u_0, v = v_0$ senkrecht schneiden, d.h. $F = 0$, dann sagt man, daß die Parameterlinien ein **orthogonales Netz** bilden.

- Der **Rand** des Flächenstücks S ist das $\mathbf{x}$-Bild des Randes von D, d.h.

$$\partial S := \{\mathbf{x}(u,v); (u,v) \in \partial D\}\,.$$

- Eine **stückweise reguläre Fläche** S ist die Vereinigung endlich vieler regulärer Flächenstücke S_i, von denen je zwei längs einer oder mehrerer gemeinsamer Randstücke aneinandertreffen. Der **Rand** ∂S von S wird aus allen Randstücken gebildet die nur zu einem regulären Flächenstück gehören. Man nennt S geschlossen, wenn $\partial S = \emptyset$.

Beispiele:

a) Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ist

$$\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{x}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

mit $(u,v) \in D$ ein Ebenenstück. Die Parameterlinien $u = const., v = const.$ sind Geraden parallel zu $\mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{b}$. Wir haben

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{b}$$
$$E = \|\mathbf{a}\|^2, \quad F = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad G = \|\mathbf{b}\|^2\,.$$

b) Aus der expliziten Darstellung $z = h(x, y)$, mit $h \in C^1(D, \mathbb{R})$ erhält man sofort die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, h(u, v))^T \,, \qquad (u, v) \in D \,.$$

Die Parameterlinien sind Schnitte mit den Ebenen $u = const., v = const.$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u = (1, 0, h_u)^T, \quad \mathbf{x}_v &= (0, 1, h_v)^T \\ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (-h_u, -h_v, 1)^T \\ E = 1 + h_u^2, \quad F &= h_u h_v, \quad G = 1 + h_v^2 \,. \end{aligned}$$

c) Aus einem regulären Kurvenstück $t \to (x(t), 0, z(t)^T), t_0 \le t \le t_1$, ohne Doppelpunkte mit $x(t) > 0$ entsteht (siehe Kapitel 6 6.13) durch Drehung um die z-Achse und den Winkel φ_0 ein reguläres Flächenstück mit der Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(t)\cos\varphi \\ x(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

definiert auf $D = \{(t, \varphi); t_0 \le t \le t_1, 0 \le \varphi \le \varphi_0\}$. Die Parameterlinien $t = const.$ sind Breitenkreise, $\varphi = const.$ die Meridiane. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= (\dot{x}(t)\cos\varphi, \dot{x}(t)\sin\varphi, \dot{z}(t))^T \\ \mathbf{x}_\varphi &= (-x(t)\sin\varphi, x(t)\cos\varphi, 0)^T \\ \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_\varphi &= (-x\dot{z}\cos\varphi, -x\dot{z}\sin\varphi, x\dot{x})^T \\ E = \dot{x}^2 + \dot{z}^2, \quad F = 0, \quad G &= x^2 \,. \end{aligned}$$

Falls $\varphi_0 = 2\pi$ ist das Flächenstück S nur stückweise regulär, da die Meridiane $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ zusammenfallen. Der Rand von S sind die Breitenkreise

$$\varphi \to (x(t_i)\cos\varphi, x(t_i)\sin\varphi, z(t_i))^T, \quad i = 0, 1 \,.$$

Falls $\varphi_0 = 2\pi$ ist das Flächenstück S nur stückweise regulär, da die Meridiane $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ zusammenfallen. Der Raum von S sind die Breitengrade.