4.4 Sonderfälle.

a) Kegelstumpf

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t,\varphi) &= \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ b(1-\frac{t}{a}) \end{pmatrix}, \quad a_0 \le t \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \\ \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_\varphi &= \left(\frac{b}{a}t\cos\varphi, \frac{b}{a}t\sin\varphi, t\right)^T\end{aligned}$$

b) Zylinderstumpf

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(z,\varphi) &= \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad z_0 \le z \le z_1, 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \\ \mathbf{x}_z \times \mathbf{x}_\varphi &= (-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, 0)^T\end{aligned}$$

c) Sphäre

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\psi,\varphi) &= \begin{pmatrix} r\sin\psi\cos\varphi \\ r\sin\psi\sin\varphi \\ r\cos\psi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \psi \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \\ \mathbf{x}_\psi \times \mathbf{x}_\varphi &= \left(r^2\sin^2\psi\cos\varphi, r^2\sin^2\psi\sin\varphi, r^2\sin\psi\cos\psi\right)^T \\ E = r^2, &\quad F = 0, \quad G = r^2\sin\psi\end{aligned}$$

Für $\psi = 0, \pi$ (Süd-,bzw. Nordpool) ist $\mathbf{x}_\psi \times \mathbf{x}_\varphi = \mathbf{0}$, längs des Halbkreises $\varphi = 0$ ist die Darstellung nicht eindeutig. Beides sind Nullmengen.

d) Torus

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\psi,\varphi) &= \begin{pmatrix} (R + r\sin\psi)\cos\varphi \\ (R + r\sin\psi)\sin\varphi \\ r\cos\psi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \psi \le 2\pi\,, \\ E = r^2, &\quad F = 0, \quad G = (R + r\sin\psi)^2\,.\end{aligned}$$

Der Torus ist eine geschlossene Fläche.

4.5 Der Flächeninhalt. *Sei* $\mathbf{x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$$

eine Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks S. *Das Flächenelement* ΔS, *berandet von den Parameterlinien* $u = u_0, u = u_0 + \Delta u, v = v_0, v = v_0 + \Delta v$, *wird durch das Parallelogramm, das von* $\mathbf{x}_u \Delta u$ *und* $\mathbf{x}_v \Delta v$ *aufgespannt wird, approximiert, denn*

$$\mathbf{x}(u,v) \approx (\mathbf{x}_u(u_0,v_0), \mathbf{x}_v(u_0,v_0)) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} + \mathbf{x}(u_0,v_0)$$

ist die beste lineare Approximation. Also gilt

$$\begin{aligned} &\Delta S \approx \Delta O\,, \\ &\Delta O = \|\mathbf{x}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0,v_0)\|\, \Delta u \Delta v\,. \end{aligned}$$

Die Fläche S *wird durch Parameterlinien in* n *Teilstücke* $S_i, i = 1, \ldots, n$, *zerlegt und diese werden durch Parallelogramme* O_i *approximiert. Der Grenzwert* $n \to \infty, \Delta u^2 + \Delta v^2 \to 0$ *liefert den* ***Flächeninhalt*** *von* S, *d.h.*

$$\begin{aligned} O(S) &:= \lim_{\substack{n \to 0 \\ \Delta u^2 + \Delta v^2 \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{x}_u(u_i,v_i) \times \mathbf{x}_v(u_i,v_i)\|\, \Delta u \Delta v \\ &= \iint\limits_D \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\, du\, dv\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Aus (4.3) *und* (4.6) *folgt*

$$O(S) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,. \tag{4.7}$$

Mit den Sprechweisen aus Kapitel 4 haben wir

$$O(S) = \iint\limits_D dO$$

mit

$$dO = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,.$$

- *Im Falle eines Graphen $z = h(x,y)$ haben wir*

$$O = \iint\limits_D \sqrt{1 + h_x^2 + h_x^2}\, dx\, dy$$

und im Falle einer Drehfläche ($\varphi_0 = 2\pi$)

$$\begin{aligned} O &= \iint\limits_D \sqrt{x^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}\, dt\, d\varphi \\ &= 2\pi \int\limits_{t_0}^{t_1} x\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\, dt\,. \end{aligned}$$

Beispiele:

a) *Kugeloberfläche. Nach 4.4 c) haben wir* $E = r^2, F = 0, G = r^2 \sin^2 \psi$ *und* $D = \{(\psi, \varphi); \psi \in [0,\pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$. *Also*

$$\begin{aligned} O &= \iint\limits_D r^2 \sin\psi\, d\psi\, d\varphi \\ &= r^2 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sin\psi\, d\psi = 4\pi r^2\,. \end{aligned}$$

b) *Torusoberfläche. Nach 4.4 d) gilt:* $G = (R + r\sin\psi)^2, E = r^2$, $F = 0$ *mit* $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. *Also ist*

$$\begin{aligned} O &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} r(R + r\sin\psi)\, d\psi\, d\varphi \\ &= 2\pi r \int\limits_0^{2\pi} R + r\sin\psi\, d\psi = 4\pi^2 rR\,. \end{aligned}$$

4.8 Definition. *Ist* $\mathbf{x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *eine Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks* S *und* f *ein auf* S *stetiges Skalarenfeld, dann nennt man*

$$\iint_S f\, dO := \iint_S f(\mathbf{x}(u,v))\, \|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)\|\, du\, dv$$

das ***Oberflächenintegral*** *von* f *über* S. *Für eine aus* $S_1, \ldots, S_n$ *bestehende stückweise reguläre Fläche* S *setzen wir*

$$\iint_S f\, dO := \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f\, dO\,.$$

- *Auf Grund der Definition gelten die üblichen Rechenregeln: Linearität, Monotonie und Additivität. Außerdem gilt der Mittelwertsatz, d.h. es existiert ein* (u^*, v^*) *mit*

$$f(\mathbf{x}(u^*, v^*)) = \frac{1}{O(S)} \iint_S f\, dO\,. \tag{4.9}$$

4.10 Berechnung des Oberflächenintegrals. *Wir gehen wie folgt vor:*

1) *Parameterdarstellung* $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^2$ *der Fläche angeben.*

2) *Die partiellen Ableitungen* $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ *und das Oberflächenelement*

$$dO = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

berechnen.

3) *Einsetzen*

$$\iint_A f\, dO = \iint_S f(\mathbf{x}(u,v))\, \|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)\|\, du\, dv$$

und ausrechnen.

Beispiele:

a) Die x, y-Koordinaten des geometrischen Schwerpunkts $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ des Teilstücks der Fläche $3z = 2(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$, der von den Ebenen $x = 0$, $y = 0, x + y = 1$ ausgeschnitten wird berechnet sich wie folgt: Flächenstück ist bezüglich x und y symmetrisch, also ist $\overline{x} = \overline{y}$.

$$
\begin{aligned}
O(S) = \iint\limits_S 1\, dO &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{1+x+y}\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3}\sqrt{(1+x+y)^3}\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \frac{2}{3}\int_2^3 (2)^{\frac{3}{2}} - (1+x)^{\frac{3}{2}}\, dx \\
&= \frac{2}{3}\, 2^{\frac{3}{2}} x\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\frac{2}{5}\, (1+x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} x\sqrt{1+x+y}\, dy\, dx &= \frac{2}{3}\int_0^1 2^{\frac{3}{2}} x - (1-x)^{\frac{3}{2}} x\, dx \\
&= \frac{2}{3} 2^{\frac{1}{2}} x^2 + \frac{8}{105}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} x\Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{2} 2^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{105} 2^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{15} 2^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{105} \\
&= \frac{22\sqrt{2} - 8}{105},
\end{aligned}
$$

$$
\overline{x} = \frac{(22\sqrt{2} - 8)15}{105 \cdot 4(\sqrt{2}+1)} = \frac{(11\sqrt{2} - 4)(\sqrt{2} - 1)}{14} = \frac{26 - 15\sqrt{2}}{14}.
$$

b) Das elektrostatische Potential $U(\mathbf{a})$ einer homogenen mit Dichte ϱ ge-

ladenen Fläche ist

$$\iint_S \frac{\varrho}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\,dO\,.$$

Falls S *der Kegelmantel* $x^2+y^2=z^2, 0\le z\le 1$ *und* $\mathbf{a}=(0,0,1)^T$ *ist, ergibt sich nach 4.4 a) die Parametrisierung* $\mathbf{x}(t,\varphi)=(t\cos\varphi, t\sin\varphi, t)^T, 0\le t\le 1, 0\le\varphi\le 2\pi, \mathbf{x}_t\times\mathbf{x}_\varphi = -t(\cos\varphi,\sin\varphi,-1)^T$ *und das Oberflächenelement* $dO=t\sqrt{2}\,d\varphi\,dt$. *Also haben wir*

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{a}) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{\varrho\sqrt{2}t}{\sqrt{t^2+(t-1)^2}}\,d\varphi\,dt = 2\pi\sqrt{2}\varrho\int_0^1\frac{t}{\sqrt{2t^2-2t+1}}\,dt\\
&= \pi\sqrt{2}\varrho\int_0^1\frac{4t-2}{2\sqrt{2t^2-2t+1}}+\frac{1}{\sqrt{2t^2-2t+1}}\,dt\\
&= \pi\sqrt{2}\varrho\sqrt{2t^2-2t+1}\Big|_0^1 + 2\pi\varrho\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(2t-1)^2+1}}\,dt\\
&= \sqrt{2}\varrho\pi\sqrt{2t^2-2t+1} + \varrho\pi\ln(2t-1+\sqrt{(2t-1)^2)}\Big|_0^1\\
&= \varrho\pi\left(\ln(1+\sqrt{2})-\ln(\sqrt{2}-1)\right)\\
&= \varrho\pi\ln(3+2\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

- *Das Oberflächenintegral tritt bei Berechnungen von Flächeninhalten von Flächen im Raum und bei Berechnugn der Masse, der Ladung und des Massenmittelpunktes auf.*
- *Die Berechnug des Oberflächenintegrals ist oft schwierig, kann aber durch eine dem Problem und der Geometrie der Fläche angepaßte Koordinatenwahl vereinfacht werden.*

4.11 Definition. *Eine Parameterdarstellung* $\mathbf{x}=(x,y)^T: D\to S, x=x(u,v), y=y(u,v)$ *eines* ***ebenen*** *regulären Flächenstücks* S *heißt auch* ***Koordinatentransformation****, d.h.*

1) $x=x(u,v), y=y(u,v)$ *sind* C^1*-Funktionen,* *2) aus* $x(u,v) = x(u',v')$ *und* $y(u,v) = y(u',v')$ *folgt* $(u,v) = (u',v')$,

3) $|x_u y_v - x_v y_u| \neq 0$ *für alle* $(u,v) \in D$.

Die Parameterlinien heißen ***Koordinatenlinien*** *und man nennt das Netz der Koordinatenlinien ein* ***krummliniges Koordinatensystem*** *auf* S.

- Das Gebietsintgral $\iint\limits_S f\,dF$ ist unabhängig von der Zerlegung von S.
  Die Zerlegung durch kartesische Koordinatenlinien liefert (siehe (3.13))

$$\iint\limits_S f\,dF = \iint\limits_S f\,dx\,dy\,,$$

andererseits liefert die Zerlegung durch die krummlinigen Koordinatenlinien (siehe (4.8))

$$dF = dO = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\ du\,dv$$

wobei $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), 0)^T$ ist. Also haben wir

$$\begin{aligned} dF &= |x_u y_v - x_v y_u|\ du\,dv = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right|\ du\,dv \\ &=: \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ du\,dv\,, \end{aligned}$$

wobei $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ die **Funktionaldeterminate** heißt. Also gilt

$$\iint\limits_S f\,dF = \iint\limits_D f\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ du\,dv\,.$$

Wir haben also bewiesen:

4.12 Satz. *Entsteht ein regulärer Bereich* $S \subseteq \mathbb{R}^2$ *unter der Koordinatentransformation* $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$ *aus* D, *dann gilt für jedes auf* S *stetige Skalarenfeld* f *die Transformationsformel*

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ du\,dv\,. \qquad (4.13)$$

- *Wegen* (4.9) *verändern sich die Integrale in* (4.13) *nicht wenn* S *bzw.* D *durch* $S \backslash N$ *bzw.* $D \backslash M$ *ersetzt werden, wobei* N *und* M *Nullmengen sind. Insbesondere sind also* C^1*-Transformationen* $\mathbf{x} : D \to S$ *die nur auf* $D \backslash M$*, mit einer Nullmenge* M*, die Bedingugen aus 4.11 erfüllen, zulässig.*

- *Folgende Fälle treten besonders häufig auf:*

  a) *affine Koordinaten:*
  $x = au + bv + x_0, y = cu + dv + y_0$*, mit* $ad - bc \neq 0$
  $dF = |ad - bc|\ du\, dv$
  $$\iint\limits_S f(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_D f(au+bv+x_0, cu+dv+y_0)\ |ad - bc|\ dx\, dy.$$

  b) *Polarkoordinaten*

  $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad dF = r\, dr\, d\varphi$$
  $$\iint\limits_S f(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi\, .$$

Beispiele:

a) *Durch die lineare Transformation* $x = au, y = bv, a, b > 0$ *geht der Kreis* $K : u^2 + v^2 \leq 1$ *in die Ellipse* $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ *über. Also gilt:*

$$F(E) = \iint\limits_E dx\, dy = \iint\limits_K ab\, du\, dv = abF(K) = ab\pi\, .$$

b) *Für die Gaußverteilung* $F(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\, dt$ *gilt:* $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$*, d.h.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}\, .$$

4.14 Definition. *Ist S ein durch die Parameterdarstellung $\mathbf{x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegebenes reguläres Flächenstück mit der Flächennormalen $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$ und $\mathbf{v}$ ein auf S stetiges Vektorfeld, dann nennt man das Oberflächenintegral der skalaren Normalenkomponente $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ den* ***Fluß*** *von $\mathbf{v}$ durch S, d.h.*

$$\iint\limits_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} := \iint\limits_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO = \iint\limits_S \det(\mathbf{v}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)\, du\, dv\,.$$

Man nennt

$$\begin{aligned} d\mathbf{O} := \mathbf{n} dO &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\, du\, dv \\ &= \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\, du\, dv \end{aligned}$$

das ***vektorielle Oberflächenelement*** *von S.*

- ***Integration:*** *Für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ einer stationären Strömung ist die Determinante*

  $$\det(\mathbf{v}, \mathbf{x}_u\, du, \mathbf{x}_v\, dv) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)\, du\, dv$$

  das Volumen der Flüssigkeitmenge die pro Zeiteinheit durch das Oberflächenelement dO fließt, denn

  $$\begin{aligned} \det(\mathbf{v}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)\, du\, dv &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)\, du\, dv \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dO\,. \end{aligned}$$

- *Fall S durch einen Graphen $z = h(x, y)$ gegeben ist, haben wir für den Fluß eines Vekorfeldes $\mathbf{v}$*

  $$\begin{aligned} \iint\limits_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} &= \iint\limits_D \det \begin{pmatrix} v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 \\ v_3 & h_x & h_y \end{pmatrix} dx\, dy \\ &= \iint\limits_D (-v_1 h_x - v_2 h_y + v_3)\, dx\, dy\,, \end{aligned}$$

  wobei $v_i = v_i(x, y, h(x, y))$.

Beispiel: *Der Fluß des elektrischen Feldes* $D = \frac{cq}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}$ *einer Punktladung* q *im Ursprung durch die Sphäre* $S : \|\mathbf{x}\| = R$ *ist wegen*

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \frac{cq}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}\cdot\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{cq}{R^2}$$

$$\iint\limits_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dO = \iint\limits_S \frac{cq}{R^2}\,dO = \frac{cq}{R^2}\iint\limits_S dO = 4\pi cq\,.$$

- *Der Satz von Green hat eine Verallgemeinerung für* ***zweiseitige Flächen*** *im Raum, d.h. Flächen für die man eindeutig von einer Ober- bzw. Unterseite sprechen kann. Jedes reguläre Flächenstück* $\mathbf{x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ *ist zweiseitig. Die Oberseite ist die Seite in die die Flächennormale* $\mathbf{n}$ *zeigt. Eine stückweise reguläre Fläche ist* ***zweiseitig****, wenn man die Oberseiten der Flächenstücke* S_k *so wählen kann, daß sich der Umlaufsinn über die Kanten* $S_k \cap S_j$ *stetig fortsetzt.*

Gegenbeispiel: *Das Möbiusband, hat nur eine Seite.*

4.15 Satz (Stokes). *Sei* S *eine zweiseitige, stückweise reguläre Fläche mit überschneidungsfreier und geschloßener Randkurve* ∂S*, die so durchlaufen wird, das* S *links liegt und der Umlaufsinn zusammen mit der Normalenrichtung* $\mathbf{n}$ *von* S *ein Rechtssystem ergibt. Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^3$ *eine offene Menge, die* S *enthält. Dann gilt für alle* C^1*-Vektorfelder* $\mathbf{v} : U \to \mathbb{R}^3$

$$\oint\limits_{\partial S} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dO\,. \tag{4.16}$$

- *Falls* S *ein ebener Bereich der* (x, y)*-Ebene ist und* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)^T$ *ein ebenes Vektorfeld ist, gilt:*

  $$\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\,,$$

  mit $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$*. Somit geht* (4.16) *in die Formel in* (3.18) *über.*

Beispiel: *Sei* $\mathbf{v} = (x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ *das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung im Zylinder* $x^2+y^2 \leq 1$*. Wir wollen die Zirkulation von* $\mathbf{v}$ *längs des Schnittes des Zylindermantels mit der Ebene* $x + y + z = 1$ *berechnen.*

a) Methode aus 2.10

1) Parametrisierung

$$\varphi \to (\cos\varphi, \sin\varphi, 1 - \sin\varphi - \cos\varphi)^T, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$

2) Bogenelement

$$d\mathbf{x} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, \sin\varphi - \cos\varphi)^T\, d\varphi\,.$$

3) Einsetzen

$$\int_0^{2\pi} (\sin\varphi)^3 \sin\varphi + (\cos\varphi)^3 \cos\varphi - (1 - \sin\varphi - \cos\varphi)^3 (\sin\varphi - \cos\varphi)\, d\varphi$$

Ausrechnen = viel Arbeit.

b) Satz 4.15

1) Parametrisierung

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, 1 - u - v)^T \quad (u,v) \in B_1(0)\,,$$

2)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{v} &= (0, 0, 3(x^2 + y^2))^T\,, \\ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (1,1,1)^T\,, \end{aligned}$$

3) Einsetzen

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dO = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)\, du\, dv \\ &= 3 \iint_K u^2 + v^2\, du\, dv = 3 \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 r\, dr\, d\varphi = \frac{3}{2}\pi\,. \end{aligned}$$

- *In* (4.16) *kann S durch jede andere Fläche ersetzt werden die denselben Rand ∂S hat, d.h.*

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O}$$

gilt für beliebige stückweise reguläre Flächen S_1, S_2 mit Rand ∂S.

4.17 Interpretation der Rotation. *Sei S ein reguläres Flächenstück im Definitionsbereich von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{x}$ ein Punkt in S. Sei ∂S_r der Durchschnitt von S mit der $B_r(\mathbf{x})$ Kugel. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S_r} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \iint_{S_r} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dO \\ &= \operatorname{rot} \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}})\,.\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\partial(S_r)} \oint_{\partial S_r} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}\,.$$

Rechts steht die „Zirkulation pro Flächeneinheit", diese wird ***Wirbelstärke*** *genannt. Sie ist am größten wenn die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ in dieselbe Richtung wie die Normale $\mathbf{n}$ zeigt.*