- *In* (4.16) *kann S durch jede andere Fläche ersetzt werden die denselben Rand ∂S hat, d.h.*

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O}$$

gilt für beliebige stückweise reguläre Flächen S_1, S_2 mit Rand ∂S.

4.17 Interpretation der Rotation. *Sei S ein reguläres Flächenstück im Definitionsbereich von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{x}$ ein Punkt in S. Sei ∂S_r der Durchschnitt von S mit der $B_r(\mathbf{x})$ Kugel. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S_r} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \iint_{S_r} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dO \\ &= \operatorname{rot} \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}})\,. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\partial(S_r)} \oint_{\partial S_r} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}\,.$$

*Rechts steht die „Zirkulation pro Flächeneinheit“, diese wird **Wirbelstärke** genannt. Sie ist am größten wenn die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ in dieselbe Richtung wie die Normale $\mathbf{n}$ zeigt.*

8.5 Integration über dreidimensionale Bereiche

Die Methoden aus Abschnitt 8.3 werden auf 3-dimensionale Bereiche übertragen.

5.1 Das Volumen. *Der (x, y, z)-Raum wird durch achsenparallele Ebenen*

$$x = n2^{-k}, \qquad y = n2^{-k}, \qquad z = n2^{-k}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

in Würfel mit dem Volumen 2^{-3k} zerlegt. Für eine beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ bezeichne $s_k(M)$ bzw. $S_k(M)$ das Gesamtvolumen aller ganz in M enthaltenen Würfel bzw. aller Würfel die mindestens einen Punkt aus M enthalten. Man nennt M ***Riemann-meßbar*** *und $V(M)$ das* ***Volumen*** *von M, wenn*

$$V(M) := \lim_{k \to \infty} s_k(M) = \lim_{k \to \infty} S_k(M) .$$

Besteht eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ aus nur endlich vielen Punkten, regulären Kurvenstücken und regulären Flächenstücken, so bezeichnet man sie als ***Nullmenge*** *und es gilt:*

$$V(M) = V(M \cup N) = V(M \backslash N) ,$$

wobei M eine Riemann-meßbare Menge ist.

5.2 Definition. *Ein Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt* ***regulär****, wenn:*

1) Der Rand ∂B aus endlich vielen stückweise regulären Flächen besteht,

2) $B \backslash \partial B$ ein nicht leeres, beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ ist,

3) B abgeschloßen ist, d.h. $\partial B \subseteq B$.

- Man kann zeigen, daß jeder reguläre Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ Riemann-meßbar ist und ein Volumen $V(B) \neq 0$ besitzt.

5.3 Das Volumenintegral. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein regulärer Bereich und f ein auf B stetiges Skalarenfeld. B wird durch reguläre Schnittflächen in reguläre Teilbereiche $B_1, \ldots , B_n$ mit Volumen $\Delta V_1, \ldots , \Delta V_n$ zerlegt. In jedem B_i wird ein Punkt (x_i, y_i, z_i) gewählt und die* ***Riemannsumme***

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

gebildet. Wie bei zweidimensionalen Bereichen kann man zeigen, daß Z_n gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn der maximale Durchmesser $\delta_{\max}$ gegen Null strebt. Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Zerlegung und wird ***Volumenintegral*** *genannt und mit*

$$\iiint\limits_B f\, dV := \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta_{\max} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i \tag{5.4}$$

bezeichnet. Das Symbol dV heißt Volumenelement.

- *Es gelten die üblichen Rechenregeln: Linearität, Monotonie, Additivität und Mittelwertsatz.*

- *Wenn eine Zerlegung von B mit achenparallelen Schnittebenen gewählt wird bezeichnet man das Volumenintegral durch*

$$\iiint_B f\, dV =: \iiint_B f\, dx\, dy\, dz\,. \tag{5.5}$$

- *Läßt sich B als Abschnitt eines geraden Zylinders darstellen mit einem regulären Bereich D der (x,y)-Ebene als Querschnitt, unten und oben beschränkt von den Graphen $z = g(x,y)$ bzw. $z = h(x,y)$, d.h.*

$$B = \{(x,y,z); (x,y) \in D, g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}\,,$$

und fasst man in der Riemannsumme die Summanden so zusammen, daß zuerst über alle in z-Richtung liegenden Teilbereiche summiert wird, dann kann man zeigen:

$$\iiint_B f\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy\,. \tag{5.6}$$

Analoge Formeln gelten auch für Zylinderabschnitte in den anderen Richtungen.

- *Ist der oben beschriebene Querschnitt D ein Normalbereich, z.B.*

$$B = \{(x,y,z); a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x), g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}\,,$$

dann gilt wegen (5.6) *und Satz 3.15*

$$\iiint_B f\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx\,.$$

- *Im Falle eines Quaders gilt der Satz von Fubini, d.h.*

$$\iiint\limits_B f\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\int\limits_{y_0}^{y_1}\left(\int\limits_{z_0}^{z_1} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$
$$= \int\limits_{z_0}^{z_1}\left(\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\int\limits_{y_0}^{y_1} f(x,y,z)\,dy\right)dx\right)dz = \ldots$$

5.7 Einfache Anwendungen. *Das Volumen eines regulären Bereiches berechnet sich als*

$$V(B) = \iiint\limits_B dV\,. \tag{5.8}$$

Insbesondere gilt im oben beschriebenen Falle eines Abschnitts eines geraden Zylinder die Formel

$$V(B) = \iint\limits_D \big(h(x,y) - g(x,y)\big)\,dx\,dy\,. \tag{5.9}$$

Die Masse eines Körpers mit Massendichte ϱ berechnet sich als

$$M = \iiint\limits_B \varrho\,dV\,. \tag{5.10}$$

Die Momente sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} M_{y,z} &:= \iiint\limits_B x\,\varrho(x,y,z)\,dV\,,\\ M_{x,y} &:= \iiint\limits_B z\,\varrho(x,y,z)\,dV\,,\\ M_{x,z} &:= \iiint\limits_B y\,\varrho(x,y,z)\,dV\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Der geometrische Mittelpunkt $\mathbf{S} = (x_\mathbf{S}, y_\mathbf{S}, z_\mathbf{S})$ *eines Bereiches* B *hat die Koordinaten* ($\varrho = 1$ *in* (5.10))

$$x_\mathbf{S} = \frac{1}{M} M_{y,z}, \quad y_\mathbf{S} = \frac{1}{M} M_{x,z}, \quad z_\mathbf{S} = \frac{1}{M} M_{x,y}. \tag{5.12}$$

Das axiale Trägheitsmoment T *berechnet sich durch*

$$T = \iiint\limits_B r^2 \varrho \, dV, \tag{5.13}$$

wobei $r = r(x,y,z)$ *der Abstand des Punktes* $(x,y,z) \in B$ *von der zu betrachtenden Achse ist.*

Beispiele:

a) Das axiale Trägheitsmoment des Würfels $-1 \le x, y, z \le 1$ um die z-Achse ist:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 + y^2 \, dx\, dy\, dz = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{3}x^3 + y^2 x \Big|_{x=-1}^{x=1} dy$$
$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{2}{3} + 2y^2 \, dy = \frac{16}{3}$$

b) B sei vom Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$, und dem Kegel $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ berandet und liege im Halbraum $z \ge 0$. Man kann B darstellen als

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \le \frac{z}{c} \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

mit (x,y) aus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le \frac{1}{2}$. (Schnittfläche von Ellipsoid und Kegel).
Es gilt:

$$V(B) = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le \frac{1}{2}} \left(\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \right) dy\, dx.$$

Die Koordinatentransformation (Kombination von Polarkoordinaten und affinen Koordinaten) $x = ra\cos\varphi, y = ra\sin\varphi, 0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \le \varphi \le 2\pi$ liefert

$$\begin{aligned} V(B) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int\limits_c^{c\sqrt{1-r^2}} dz\, abr\, dr\, d\varphi \\ &= 2\pi abc\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(\sqrt{1-r^2}\right) - r\, dr \\ &= 2\pi abc\left(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\pi abc}{3}(2-\sqrt{2})\,. \end{aligned}$$

5.14 Transformation von Volumenintegralen. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein regulärer Bereich. Unter einer* ***Koordinatentransformation*** *auf B verstehen wir eine C^1-Abbildung $(u,v,w)^T \to \mathbf{x}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))^T$ eines regulären Bereiches U des (u,v,w) Raumes auf B mit den Eigenschaften:*

1) *Aus $(u,v,w) \ne (u',v',w')$ folgt $\mathbf{x}(u,v,w) \ne \mathbf{x}(u',v',w')$.*

2) *Für alle $(u,v,w) \in U$ sind die Vektoren $\mathbf{x}_u(u,v,w), \mathbf{x}_v(u,v,w)$ und $\mathbf{x}_w(u,v,w)$ linear unabhängig.*

Bei festem $u = u_0$ ist $(v,w) \to x(u_0,v,w)$ eine ***Koordinatenfläche****; analog für die Koordinatenflächen $v = v_0$, bzw. $w = w_0$. Das Bild des Quaders $u_0 \le u \le u_0 + \Delta u, v_0 \le v \le v_0 + \Delta V, w_0 \le w \le w_0 + \Delta w$ unter der Koordinatentransformation $\mathbf{x}$ wird durch einen Spat, der von den Vektoren $\mathbf{x}_u(u_0,v_0,w_0)\Delta u, \mathbf{x}_v(u_0,v_0,w_0)\Delta v$ und $\mathbf{x}_w(u_0,v_0,w_0)\Delta w$ aufgespannt wird, approximiert. Das Volumen des Spats ist*

$$V = |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_w)|\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w$$

mit der ***Funktionaldeterminante***

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} := \det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_w)\,. \qquad (5.15)$$

Durch Grenzübergang $\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2$ zeigt man wie im zweidimensionalen Fall:

5.16 Satz. *Entsteht ein regulärer Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ unter der Koordinatentransformation*

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

aus dem regulären Bereich $U \subseteq \mathbb{R}^3$, dann gilt für jedes auf B stetige Skalarenfeld f die Transformationsformel

$$\begin{aligned} &\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_U f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Die Formel (5.17) *gilt auch für Transformationen, welche die obigen Bedingungen 1),2) in 5.14 nur auf Bereichen $U \backslash M$ erfüllen, wobei M eine Nullmenge ist.*

5.18 Spezialfälle.

a) affine Koordinaten

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \det \mathbf{A} \neq 0$$
$$dV = |\det \mathbf{A}|\; du\, dv\, dw$$
$$\iiint_B f(\mathbf{x})\, dx\, dy\, dz = \iiint_U f(\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{x}_0)\, |\det \mathbf{A}|\; du\, dv\, dw$$

b) Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$
$$dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$$
$$\iiint_B f(\mathbf{x})\, dx\, dy\, dz = \iiint_U f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\, dr\, d\varphi\, dz$$

c) Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\sin\psi\sin\varphi, \quad z = r\cos\psi$$
$$dV = r^2\sin\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi$$

$$\iiint\limits_B f(\mathbf{x})\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_U \tilde{f}(r,\psi,\varphi)r^2\sin\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi$$

mit $\tilde{f}(r,\psi,\varphi) = f(r\cos\psi\cos\varphi, r\sin\psi\sin\varphi, r\cos\psi)$.

Beispiel: Das axiale Trägheitsmoment der Kugel K mit dem Radius R um die z-Achse ist

$$\iiint\limits_K (x^2+y^2)\,dV = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R} r^2\sin^2\psi r^2\sin\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi$$
$$= 2\pi\frac{R^5}{5}\int\limits_0^{\pi}\sin^3\psi\,d\psi = \frac{8}{15}\pi R^5\,.$$

5.19 Satz (Gauss). *Sei B ein regulärer räumlicher Bereich mit einer Oberfläche ∂B, die aus endlich vielen geschlossenen stückweise regulären orientierbaren Flächen besteht, die sich höchstens in Randpunkten treffen. Bezeichnet $\mathbf{n}$ die aus allen regulären Oberflächenstücken aus B nach außen weisende Einheitsnormale, dann gilt für alle in einer Umgebung von B definierten C^1-Vektorfelder $\mathbf{v}$ die Formel*

$$\iiint\limits_B \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV = \iint\limits_{\partial B} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO\,. \tag{5.20}$$

5.21 Interpretation der Divergenz. *Nach dem Satz von Gauss ist der Fluß des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch die Oberfläche (von innen nach außen) gleich dem Volumenintegral der Divergenz. Sei $P \in B$ und $B_r(P)$ eine Kugel mit dem Mittelpunkt P die ganz in B liegt, sei S_r die Kugeloberfläche. Dann gilt*

$$\iint\limits_{S_r} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO = \iiint\limits_{B_r(P)} \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV = \operatorname{div}\mathbf{v}(P^*)V(B_r)\,.$$

Der Grenzübergang $r \to 0$ liefert

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(P) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{V(B_r)} \iint_{S_r} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dO\,,$$

d.h. die Divergenz ist Fluß pro Volumeneinheit. Anders gesagt ist die Divergenz eines Vektorfeldes in einem Punkt die Quelldichte. Ist sie ungleich Null hat das Vektorfeld dort eine Quelle ($\operatorname{div}\mathbf{v} > 0$) *oder Senke* ($\operatorname{div}\mathbf{v} < 0$). *Ein Vektorfeld heißt* ***quellfrei*** *wenn überall* $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ *gilt.*

Beispiel: Der Fluß des Feldes $\mathbf{v} = (xy^2, x^2y, y)^T$ durch die Oberfläche des Zylinders $B = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le 1, -1 \le z \le 1\}$ ist

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dO &= \iiint_B \operatorname{div}\mathbf{v}\, dV \\ &= \iint_{B_1(0)} \int_{-1}^{1} x^2+y^2\, dz\, dx\, dy \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, r\, dr\, d\varphi = \pi\,.\end{aligned}$$

Da $\operatorname{div}\mathbf{v} = x^2+y^2 \neq 0$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ ist jeder Punkt außerhalb der z-Achse ein Quellpunkt.

5.22 Massenerhaltung. *Sei* $\mathbf{v}$ *das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit und* ϱ *ihre Dichte. Sie* B *ein reguläres Testvolumen mit der Oberfläche* S. *Durch das Oberflächenelement* dO *tritt pro Zeiteinheit das Flüssigkeitsvolumen* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dO$ *hindurch, also ist*

$$\iint_S \varrho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dO$$

die durch S *aus* B *herausströmende Masse. Wird in* B *keine Masse erzeugt oder vernichtet ist die zeitliche Veränderung der Masse gegeben durch (Massenfluß aus* B *heraus)*

$$-\frac{d}{dt}\iiint_B \varrho\, dV\,.$$

Also gilt unter geeigneten Voraussetzungen an $B, S, \mathbf{v}$ *und* ϱ

$$\iiint\limits_B \frac{\partial}{\partial t}\varrho\, dV + \iint\limits_S \varrho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dO = 0$$

und mit Satz 5.19

$$\iiint\limits_B \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{v})\, dV = 0\,.$$

Dies gilt für beliebige Testvolumen B, *also auch punktweise, d.h. wir haben*

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{v}) = 0\,,$$

das sogenannte ***Massenerhaltungsgesetz****.*

- *Mit ähnlichen Überlegungen können die* ***Wärmeleitungsgleichung***

  $$\frac{\partial\theta}{\partial t} - k\Delta\theta = 0\,,$$

  mit der Temperatur θ *und dem Wärmeleitungskoeffizienten* k*, sowie die* ***Maxwell Gleichungen***

  $$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \varrho \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

  hergeleitet werden.

5.23 Orthogonale krummlinige Koordinaten. *Krummlinige Koordinaten heißen* ***orthogonal****, wenn für die Koordinatentransformation*

$$\mathbf{x}(u,v,w) = x(u,v,w)\mathbf{e}_1 + y(u,v,w)\mathbf{e}_2 + z(u,v,w)\mathbf{e}_3 \qquad (5.24)$$

in jedem Punkt die Tangentialvektoren $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_w$ *paarweise orthogonal sind. Mit*

$$h_1 = \|\mathbf{x}_u\|\,, \quad h_2 = \|\mathbf{x}_v\|\,, \quad h_3 = \|\mathbf{x}_w\|$$

erhält man

$$\mathbf{x}_u =: h_1 \mathbf{e}_u, \quad \mathbf{x}_v =: h_2 \mathbf{e}_v, \quad \mathbf{x}_w =: h_3 \mathbf{e}_w \,. \tag{5.25}$$

Bei geeigneter Reihenfolge von u, v, w bilden $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ ein Rechtssystem.

5.26 Kugelkoordinaten. *Wir wählen in* (5.24) *(vergleiche 4.4 c))*

$$\begin{gathered} u = r, \quad v = \psi, \quad w = \varphi\,, \\ h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin\psi\,. \end{gathered}$$

Bezüglich der kartesischen Basis ist

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor hat die Darstellung $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$ (vergleiche 4.4 c)). $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_\varphi)$ bilden ein Rechtssystem und also gilt

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\psi,\varphi)} = h_1\, h_2\, h_3 = r^2 \sin\psi\,, \tag{5.27}$$

d.h. $dV = r^2 \sin\psi\, dr\, d\psi\, d\varphi$. Nach der Kettenregel gilt (siehe (5.25)*)*

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{x}_r\, dr + \mathbf{x}_\psi\, d\psi + \mathbf{x}_\varphi\, d\varphi \\ &= \mathbf{e}_r\, dr + r\mathbf{e}_\psi\, d\psi + r\sin\psi\mathbf{e}_\varphi\, d\varphi\,. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Somit gilt für das Bogenelement

$$ds = \sqrt{d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}} = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\psi^2 + r^2 \sin^2\psi\, d\varphi^2}\,. \tag{5.29}$$

ein reguläres Flächenstück S hat in Kugelkoordinaten die Darstellung

$$r = r(s,t), \quad \psi = \psi(s,t), \quad \varphi = \varphi(s,t)\,,$$

mit $(s,t) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Kettenregel liefert für $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r(s,t), \psi(s,t), \varphi(s,t))$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \mathbf{x}_r r_s + \mathbf{x}_\psi \psi_s + \mathbf{x}_\varphi \varphi_s \\ &= r_s \mathbf{e}_r + r\psi_s \mathbf{e}_\psi + r\sin\psi\varphi_s \mathbf{e}_\varphi\,, \\ \mathbf{x}_t &= r_t \mathbf{e}_r + r\psi_t \mathbf{e}_\psi + r\sin\psi\varphi_t \mathbf{e}_\varphi\,. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Für das vektorielle Oberflächenelement $d\mathbf{O}$ *und das Oberflächenelement* dO *gelten:*

$$\begin{aligned} d\mathbf{O} &= \mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_t \, ds \, dt \\ &= \left(r^2 \sin\psi \frac{\partial(\psi,\varphi)}{\partial(s,t)} \mathbf{e}_r + r \sin\psi \frac{\partial(\varphi,r)}{\partial(s,t)} \mathbf{e}_\psi + r \frac{\partial(r,\psi)}{\partial(s,t)} \mathbf{e}_\varphi \right) ds \, dt \,, \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$dO = \sqrt{r^4 \sin^2\psi \frac{\partial(\psi,\varphi)}{\partial(s,t)}^2 + r^2 \sin^2\psi \frac{\partial(\varphi,r)}{\partial(s,t)}^2 + r^2 \frac{\partial(r,\psi)}{\partial(s,t)}^2} \, ds \, dt \,. \tag{5.32}$$

Für eine skalare Funktion

$$f = F(r,\psi,\varphi)$$

und ein Vektorfeld

$$\mathbf{v} = V_r(r,\psi,\varphi)\mathbf{e}_r + V_\psi(r,\psi,\varphi)\mathbf{e}_\psi + V_\varphi(r,\psi,\varphi)\mathbf{e}_\varphi$$

gelten folgende Darstellungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \frac{\partial F}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \psi}\mathbf{e}_\psi + \frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \,, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2 \sin\psi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\psi V_r\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}(r\sin\psi V_\psi) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(rV_\varphi) \right), \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2 \sin\psi}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}(r\sin\psi V_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rV_\psi) \right)\mathbf{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r\sin\psi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(V_r) - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\psi V_\varphi) \right)\mathbf{e}_\psi \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\psi) - \frac{\partial}{\partial\psi}(V_r) \right)\mathbf{e}_\varphi \,, \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2\sin\psi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\psi \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sin\psi \frac{\partial F}{\partial\psi} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial F}{\partial\varphi} \right) \right) . \end{aligned}$$