Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. B. Mößner

27.10.2008

Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

WS 2008/09 — Blatt 2

Abgabe: **Montag, 03.11.2008** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

   (a)
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } q \neq 1.$$

   (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $1+3+5+7+\ldots+(2n+1)$ eine Quadratzahl.

   (c)
$$2n+1 \leq 2^n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

2. Falsche Induktion
Für $n \in \mathbb{N}$ behaupten wir folgende Aussage $A(n)$:

> Wenn sich unter n Tieren **ein** Elefant befindet,
> dann sind **alle** diese n Tiere Elefanten.

Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsbeginn: Wenn in einer Menge von $n = 1$ Tieren eines ein Elefant ist, dann sind alle Elefanten.

Induktionsschritt von n auf $n+1$: Es sei unter $n+1$ Tieren eines ein Elefant. Wir stellen die Tiere in eine Reihe und betrachten jeweils die ersten und die letzten n Tiere.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Elefant unter den ersten n Tieren. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann die ersten n Tiere sämtlich Elefanten. Dann befindet sich aber auch unter den letzten n Tieren ein Elefant. Wieder folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass auch die letzten n Tiere sämtlich Elefanten sind. Somit sind alle $n+1$ Tiere Elefanten

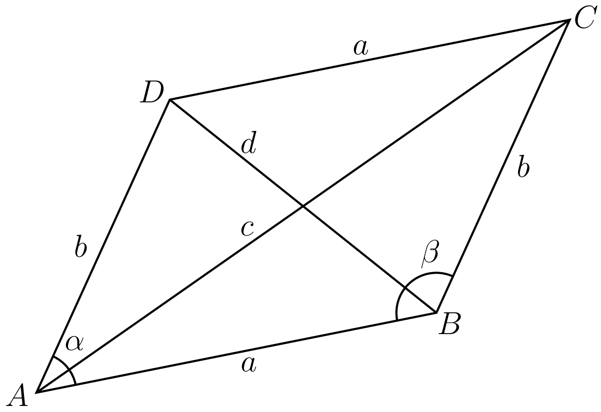
Diskutieren Sie den Beweis. Wo genau liegt der Fehler?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $P := (1,0)$ ein Punkt in der Ebene (mit kartesischen Koordinaten). Drehen Sie die Ebene um den Nullpunkt erst um den Winkel α und anschliessend um den Winkel β. Berechnen Sie jeweils die neuen Koordinaten von P. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit einer Drehung der Ebene um den Winkel $\alpha+\beta$. Leiten Sie daraus eine Formel für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, die sogenannten Additionstheoreme, her.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Gegeben sei folgendes Parallelogramm:



Zeigen Sie, dass gilt: $2a^2 + 2b^2 = c^2 + d^2$, d.h. die Summe der Quadrate der Seiten ist gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen. Dies ist die sogenannte Parallelogrammgleichung.
Tipp: Benützen Sie den Cosinussatz.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Skizzieren und charakterisieren Sie folgende Mengen in der Ebene:

(a) $A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x + 2y \geq (1 + \sqrt{3})\sqrt{x^2 + y^2}\right\}$

(b) $B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \leq 10\right\}$,

(c) $C := \left\{(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in \mathbb{R}\right\}$.