Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. B. Mößner

03.11.2008

Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

WS 2008/09 — Blatt 3

Abgabe: **Montag, 10.11.2008** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(2 Punkte)**

Gegeben seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} := (1,3,1)^T, \qquad \vec{b} := (-1,2,1)^T, \qquad \vec{c} := (2,-3,4)^T.$$

Berechnen Sie die Projektionen von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf $\vec{a}$.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Die kartesischen Koordinaten der Ecken eines Tetraeders T im $\mathbb{R}^3$ seien

$$A_1 = (1,1,1)^T, \quad A_2 = (2,-1,-1)^T, \quad A_3 = (-1,-1,1)^T, \quad A_4 = (-1,1,-2)^T.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen von T und die Flächen der 4 Seiten s_1, s_2, s_3 und s_4, wobei s_i dem Punkt A_i, mit $i = 1, \ldots, 4$, gegenüber liegt.

(b) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$, so beschreibt die Menge

$$\{\vec{a} + t\,\vec{b} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade. Hierbei ist $\vec{a} + t\vec{b}$ ist die sogenannte **Parameterdarstellung** dieser Geraden. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an, welche durch A_1 geht und senkrecht auf s_1 steht, d.h. die Höhe durch A_1.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren. Beweisen Sie:

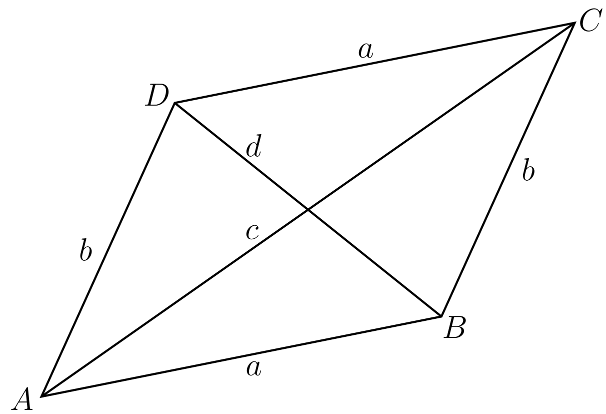
(a) **Entwicklungssatz:** $\quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) = (\vec{a} \cdot \vec{c}\,)\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}\,)\,\vec{c},$

(b) **Jakobi-Identität:** $\quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}\,) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}\,) = 0,$

(c) **Lagrange-Identität:** $\quad (\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}\,) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}\,) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}\,).$

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Gegeben sei wie auf Blatt 2, Aufgabe 3, folgendes Parallelogramm



Finden Sie für die Parallelogrammgleichung, $2a^2+2b^2 = c^2+d^2$, einen alternativen Beweis. Repräsentieren Sie hierfür $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ durch Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ und versuchen Sie a^2, b^2, c^2 und d^2 mit Hilfe von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ auszudrücken.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

1. Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen auf die Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

   (a) $(2+4i)(5-3i)$ (b) $\dfrac{4+i\sqrt{5}}{\sqrt{5}-4i}$

2. Bestimmen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese in der Ebene, indem Sie eine komplexe Zahl $z = x + iy$ als Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auffassen:

   (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |z+3|\}$

   (b) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geq 1\}$