Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. B. Mößner

17.11.2008

Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

WS 2008/09 — Blatt 5

Abgabe: **Montag, 24.11.2008** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(2 Punkte)**

Gegeben sei ein reelles Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n \geq 1$, n ungerade, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass p mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Bringen Sie die rationalen Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{4x^5 - 10x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2}{x^2 - 3x + 1} \\ f_2(x) &= \frac{8x^6 + 6x^4 + 76x^3 - 9x^2 + 105x + 36}{24x^3 + 36x + 12} \end{aligned}$$

auf die Form $f_i = p_i/q_i = h_i + r_i/q_i$ mit Polynomen h_i, r_i und $r_i = 0$ oder Grad $r_i <$ Grad q_i.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ 1 + \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} \end{aligned}$$

Zeigen Sie weiter für "erlaubte" x, y:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

(a) Beweisen Sie die folgende **Formel von De Moivre (1667-1754)**

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} \cos^{n-k}x \, \sin^k x$$

mit Hilfe der Eulerschen Formel und der binomischen Formel.

(b) Leiten Sie aus der Formel von De Moivre nun Additionstheoreme für $\sin(3x)$ und $\cos(3x)$ her, welche nur Potenzen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ benutzen.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass alle Nullstellen des Polynoms $x^n - 1$, $n \geq 1$, durch

$$\zeta_k := \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

gegeben sind. Zeichnen Sie für $n = 5$ diese Nullstellen in der komplexen Ebene.