Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. B. Mößner 24.11.2008

Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

WS 2008/09 — Blatt 6

Abgabe: **Montag, 01.12.2008** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Amplitude und die Phase der harmonischen Schwingung

$$s(t) = 4\cos(2t + \pi/3) + 2\cos(2t - \pi/3).$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_n := (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}, \qquad b_n := \binom{n}{2}\frac{1}{n^2},$$

$$c_n := \frac{2n^2+1}{n^2+n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad d_n := \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right),$$

$$e_n := \frac{n!}{10^n}, \qquad f_n := \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \tfrac{1}{k^2}\right).$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Überprüfen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ sei definiert durch

$$c_n := \min(a_n, b_n).$$

Zeigen Sie, dass auch $(c_n)_{n\geq 0}$ konvergent ist und dass für ihren Grenzwert gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \min(a, b)$.

Bemerkung: Analog kann man für die Folge $(d_n)_{n\geq 0}$, $d_n := \max(a_n, b_n)$, zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \max(a, b)$ gilt.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Seien p und q Polynome vom Grad r bzw. s mit $r, s \geq 0$, d.h. $p(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i x^i$ mit $a_r, b_s \neq 0$. Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ sei gegeben durch

$$c_n := \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{r} a_i n^i}{\sum_{i=0}^{s} b_i n^i}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $r < s$, so ist $(c_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge.

(b) Ist $r = s$, so konvergiert $(c_n)_{n\geq 0}$ gegen $\frac{a_r}{b_s}$.

(c) Ist $r > s$, so divergiert $(c_n)_{n\geq 0}$ gegen ∞, falls $\frac{a_r}{b_s}$ positiv ist, und gegen $-\infty$, falls $\frac{a_r}{b_s}$ negativ ist.

Hinweis: Natürlich kann es vorkommen, dass $q(n) = 0$ ist und damit c_n nicht wohldefiniert ist. Da jedoch jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen besitzt, kann dies nur endlich oft vorkommen. Es gibt also ein $N \geq 0$, so dass $q(n) \neq 0$ für alle $n \geq N$. Strenggenommen müsste man also die Folge $(c_n)_{n\geq N}$ betrachten.

Aufgabe 6 **(3 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, mit $n \geq 1$, monoton fallend ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\tilde{e} = e$ ist, mit $\tilde{e} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ und $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Hinweis:
Zum Abschluß der Veranstaltungen zum Jahr der Mathematik führt der aka-Filmclub (http://www.aka-filmclub.de/) vier Filme mit mathematischem Inhalt vor.
Den Anfang bildet der Film **Möbius** (spanisch, Original mit Untertitel) am

Do 27.11.08, 20 Uhr, KG II, Hörsaal 2006.