Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. B. Mößner 22.12.2008

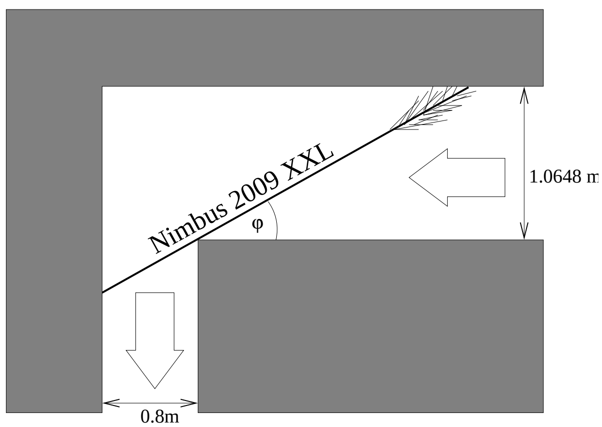
Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

WS 2008/09 — Blatt 10

Abgabe: **Montag, 12.01.2009** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Der Weihnachtsmann bring Harry als Geschenk einen neuen fliegenden Besen, den Nimbus 2009 XXL. Traditionell benützt der Weihnachtsmann den Weg durch den Kamin, um die Geschenke zu verteilen. In Harrys Haus ist der Kamin sehr eng und verwinkelt. Plötzlich steht der Weihnachtsmann vor der folgenden Ecke:



(a) Wie lang muss der Nimbus 2009 XXL sein, damit er genau bei dem Winkel φ verkantet. Diese Länge sei mit $l(\varphi)$ bezeichnet. (Zur Vereinfachung soll das Problem wie in der Skizze zweidimensional betrachtet werden, d.h. die Lage des Besens ist bereits durch den Winkel φ festgelegt.)

(b) Skizzieren Sie $l(\varphi)$ für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

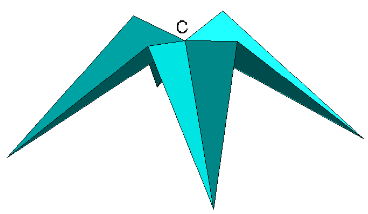
(c) Wie lange dürfte der Nimbus 2009 XXL höchstens sein, damit er nicht verkantet? Wird Harry unter seinen Weihnachtsgeschenken auch den neuen $2,50\,m$ langen Besen finden?

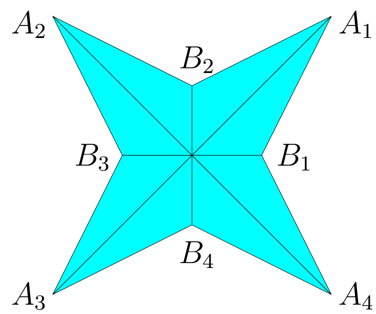
Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 99x + 1$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f mit Hilfe des Newton–Verfahrens, so dass der Fehler kleiner als 10^{-5} ist. Begründen Sie, warum die Voraussetzungen für das Verfahren erfüllt sind. Sie dürfen ausnahmsweise mit dem Taschenrechner rechnen.
Hinweis: Ermitteln Sie zunächst passende Intervalle, in denen jeweils genau eine Nullstelle liegt. Dies kann man z.B. durch Skizze oder durch Einsetzen ganzzahliger Werte mit Hinblick auf Vorzeichenwechsel machen.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Der Weihnachtsmann braucht ein neues Dach für seinen Rentierstall. Nach Absprache mit dem Architekten hat er sich für das im Bild dargestellte Design entschieden. Beim Entwerfen hat der Weihnachtsmann mehrmals betont, dass die Positionen der Punkte $A_i = (\pm 1, \pm 1, 0)^T$ und $B_i = (\pm 1/2, 0, 1)^T$ bzw. $B_i = (0, \pm 1/2, 1)^T$, $i = 1, \ldots, 4$, feststehen. Aufgabe des Architekten ist es nur noch, die Höhe des Punktes $C = (0, 0, z)^T$ in der Mitte zu bestimmen. Der Weihnachtsmann möchte möglichst wenig Material zum Dachbau verwenden, d.h. der Punkt C soll so gewählt werden, dass die Gesamtfläche des Daches minimal wird. Bestimmen Sie die minimale Fläche des Daches.





Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I := (a, b)$, $a < b$, strikt monoton wachsend und stetig. Zeigen Sie, dass dann auch f^{-1} stetig ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ebenfalls monoton wachsend ist. (Existenz von f^{-1} wurde in der Vorlesung bewiesen.) Untersuchen Sie nun die Stetigkeit von f^{-1} in einem Punkt $y_0 \in f(I)$ mit dem Epsilon-Delta-Kriterium, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in f(I)$ gilt

$$|y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon.$$

Zeigen Sie dazu, dass für ein $\epsilon > 0$ ein ϵ' existiert mit $0 < \epsilon' < \epsilon$ und

$$a < f^{-1}(y_0) - \epsilon' < f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0) + \epsilon' < b$$

Benutzen Sie nun die Monotonie von f und f^{-1}.

Frohe Weihnachten!