Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. B. Mößner

12.01.2009

Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

WS 2008/09 — Blatt 11

Abgabe: **Montag, 19.01.2009** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Weiterhin sei $n \geq 1$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die **Ungleichung von Jensen**:

$$f\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

In anderen Worten: Bei einer konvexen Funktion ist der Funktionswert des Mittelwertes kleiner gleich dem Mittelwert der Funktionswerte.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^x$. Berechnen Sie die Ableitung f'. Überprüfen Sie, ob die Grenzwerte $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls. Bestimmen Sie den Wertebereich von f. Prüfen Sie f auf Konvexität.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Beweisen Sie das Additionstheorem für $\sinh(\alpha+\beta)$ sowie die Gleichung $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitungen von $(x^x)^x$ und $x^{(x^x)}$ für $x > 0$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Seien $0 < a < b$. Berechnen Sie

$$\int_a^b x \ln^2 x \, dx.$$