Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. B. Mößner

09.02.2009

Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

WS 2008/09 — Blatt 15

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass die folgenden Reihen für alle $x \in (-1,1)$ absolut gegen die nebenstehenden Werte konvergieren:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

(b) Aufgrund der Identität

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x},$$

lässt sich die dritte Reihe als Summe (mit Vorfaktor 1/2) und als Produkt der ersten beiden Reihen darstellen. Verifizieren sie an diesem Beispiel die Rechenregeln für unendliche Reihen, d.h. Addition und Cauchyprodukt von unendlichen Reihen.

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} x^n, \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} x^{5n}.$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Reihen in den Randpunkten.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen im Entwicklungspunkt $a = 0$:

$$f(x) := \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \qquad g(x) := \frac{50x^2 + 55x - 73}{(x-1)(5x-1)},$$
$$h(x) := \sqrt[3]{2+x^2}, \qquad p(x) := \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Konvergenzradien.

Tipp: Nützlich sind die Sätze über gliedweise Differentiation und Integration, Cauchyprodukt und Binomische Reihe.

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe von Taylor-Reihen die folgenden Grenzwerte:

$$A := \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin x}, \qquad B := \lim_{x \to 0} \Big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\Big).$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die ersten vier Glieder der Taylor-Reihe um den Punkt $a = 0$ von

$$f(x) := (1 + \cos(x))^x.$$

Tipp: Stellen Sie f mit Hilfe der Exponentialfunktion dar und nützen Sie aus, dass man Potenzreihen ineinander einsetzen darf.