Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

10.1.2000

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 10

Abgabe: **Montag, 17.1.2000**

Definition:

(a) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls A nur auf und oberhalb der Diagonale von Null verschiedene Werte besitzt, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq j < i \leq n$.

(b) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *untere Dreiecksmatrix*, falls A nur auf und unterhalb der Diagonale von Null verschiedene Werte besitzt, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Sei $\mathcal{U}$ definiert durch

$$\mathcal{U} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{U}$ ist eine $\mathbb{R}$–Algebra.

(b) Ist $A \in \mathcal{U}$ invertierbar, so ist auch $A^{-1} \in \mathcal{U}$.

(c) Hat $A \in \mathcal{U}$ auf der Diagonale nur Einsen, so ist A invertierbar und A^{-1} hat auf der Diagonale ebenfalls nur Einsen.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Seien $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie:

(a) Das Produkt $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m$ ist genau dann invertierbar, wenn die einzelnen Faktoren $A_1, A_2, \dots, A_m$ invertierbar sind.

(b) Seien $A_1, A_2, \dots, A_m$ invertierbar, dann gilt

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Seien $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei untere und $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei obere Dreiecksmatrizen, wobei U_1 und U_2 nur Einsen auf der Diagonale haben. Weiterhin sei $A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2$. Zeigen Sie, dass hieraus schon $L_1 = L_2$ und $U_1 = U_2$ folgt. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 und 2.)

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Sei A gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat vollen Zeilenrang nämlich 3 und die ersten drei Spalten sind linear unabhängig. Damit sind die Voraussetzungen für das allgemeine Lösungsverfahren aus der Vorlesung erfüllt und man kann A in A_D (die ersten drei Spalten) und A_I (die letzten zwei Spalten) zerlegen, d.h. $A = (A_D, A_I)$. Geben Sie nun alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe der ebenfalls aus der Vorlesung bekannten Formel

$$x = \begin{pmatrix} x_D \\ x_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_D^{-1}b - A_D^{-1} \cdot A_I x_I \\ x_I \end{pmatrix}$$

für die folgenden rechten Seiten an:

$$b = (3, 1, -4)^T, \qquad \text{bzw. } b = (0, 7, -3)^T, \qquad \text{bzw. } b = (-2, 5, 1)^T.$$

Hierbei steht x_D für die ersten drei Komponenten von x und x_I für die letzten zwei Komponenten von x.