Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 17.1.2000

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 11

Abgabe: **Montag, 24.1.2000**

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass dann auch A^T invertierbar ist, und es gilt:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x) := Ax$. Geben Sie eine Basis vom Bild von F und eine Basis vom Kern von F an.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Seien $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$u_1 := (1,0,3,0)^T, \qquad u_2 := (0,1,-2,4)^T,$$
$$u_3 := (1,-2,4,-2)^T, \qquad u_4 := (0,0,0,1)^T.$$

(a) Berechnen Sie die duale Basis von $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

(b) Berechnen Sie den Annihilator von $U := L(\{u_1, u_2, u_3\})$.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

(a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Spur}(A \cdot B) = \operatorname{Spur}(B \cdot A).$$

(b) Beweisen Sie: Es gibt keine Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A \cdot B - B \cdot A = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist.