

## Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 13

Abgabe: Montag, 7.2.2000

### Aufgabe 1:

(6 Punkte)

Für  $x \in \mathbb{R}^n$  definiert man

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  und  $\|\cdot\|_\infty$  Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind.  
(Hinweis zu  $\|\cdot\|_2$ : Benutzen Sie das Standardskalarprodukt  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .)
- (b) Zeichnen Sie die Einheitskugeln im  $\mathbb{R}^2$  bzgl. der Normen  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  und  $\|\cdot\|_\infty$ , d.h. die Mengen  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ , wobei  $\|\cdot\|$  für eine der drei Normen steht.

### Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass jede Norm positiv definit ist, sich linear bzgl. positiver Vielfacher verhält und die Dreiecksungleichung erfüllt. Dies ist die Definition einer Norm! Wird eine Norm jedoch durch ein Skalarprodukt erzeugt, d.h.  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , so hat sie noch weitere angenehme Eigenschaften:

- (a) Zeigen Sie, dass jede Norm, die durch ein Skalarprodukt erzeugt wird, folgende Gleichung erfüllt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Diese Gleichung nennt man auch Parallelogrammgleichung, da sie die Verhältnis der Seiten und der Diagonalen eines Parallelogramms beschreibt.

- (b) Folgern Sie, dass die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_\infty$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  nicht durch Skalarprodukte erzeugt werden. (Nehmen Sie an, dass es erzeugende Skalarprodukte gibt und führen Sie die Parallelogrammgleichung mit Hilfe der Standardvektoren zum Widerspruch.)

### Aufgabe 3:

(4 Punkte)

Sei  $V := P_2(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) \quad \text{für } p, q \in V$$

ein Skalarprodukt definiert.

Hierbei dürfen Sie folgende Aussage ohne Beweis benutzen: Jedes Polynom vom Grade  $n$ , welches nicht das Nullpolynom ist, besitzt maximal  $n$  verschiedene Nullstellen.

**Aufgabe 4:**

(6 Punkte)

Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $U, W$  seien Untervektorräume. Beweisen Sie:

(a)  $U^\perp \cap W^\perp = (U + W)^\perp$ ,

(b)  $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$ .