Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 7.2.2000

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 14

Abgabe: **Montag, 14.2.2000**

Definition:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Weiterhin sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$, d.h. $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Die Matrix A heißt **positiv definit** genau dann, wenn gilt:

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle Ax, x\rangle \geq 0$,

(ii) $\langle Ax, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und alle Diagonalelemente von A positiv sind.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$, d.h. $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$.

(b) Ist A symmetrisch und positiv definit, so definiert die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A \; : \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$\text{mit } \langle x, y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle,$$

ein weiteres Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ auf dem $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie dies.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine Abbildung mit $f(0) = 0$ und $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$ für alle $u, v \in V$. (Es wird nicht vorausgesetzt, dass f linear ist!) Man zeige: f ist orthogonal.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $2\langle u, v\rangle = \cdots = 2\langle f(u), f(v)\rangle$ und anschließend die Linearität von f.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

1. Sei V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim(V) \geq 2$. Man gebe eine Abbildung $f : V \to V$ an, die isometrisch, aber nicht orthogonal ist.

2. Geben Sie eine surjektive(!) Abbildung g vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ an, die isometrisch aber nicht orthogonal ist.

Aufgabe 5: (2 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt orthonormalisiere man mit Hilfe des Gram–Schmidt–Verfahrens das folgende System:

$$u_1 = (1,2,1)^T, \qquad u_2 = (2,1,1)^T, \qquad u_3 = (1,0,1)^T.$$

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Sei $P_3([0,1])$, der Raum der Polynome über $[0,1]$ mit Grad kleiner gleich 3, ausgestattet mit folgendem Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Man orthonormalisiere die Basis $1, x, x^2, x^3$ mit Hilfe des Gram–Schmidt–Verfahrens.