

Lineare Algebra I
WS 1999/2000 — Blatt 3

Abgabe: Montag, 15.11.1999

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bringen Sie die folgenden Gleichungssysteme auf Stufenform und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 & 1 & -7 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 8 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 9 & -3 & -12 & -1 & -14 & 2 \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 5 & -2 & 16 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & -5 \end{array} \right).$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Wir setzen $a_1 = (1, 3, 0)$, $a_2 = (2, 1, 1)$, $a_3 = (0, 1, 1)$ und $a_4 = (0, 5, -1)$.

- a) Man stelle $(1, -2, 5)$ als Linearkombination von a_1, a_2 und a_3 dar.
- b) Man stelle $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 1)$ jeweils als Linearkombination von a_1, a_2, a_3 dar und zeige, dass jedes Element $b \in \mathbb{R}^3$ eine Linearkombination von a_1, a_2, a_3 ist.
- c) Man gebe ein $b_0 \in \mathbb{R}^3$ an, das sich nicht als Linearkombination von a_1, a_2, a_4 darstellen läßt. Begründen Sie die Nicht-Darstellbarkeit.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Beweisen Sie ausgehend von den Körper-Axiomen aus der Vorlesung folgende Aussagen:

- a) Es existiert **genau ein** Einselement.
- b) Für alle $x, y \in K$ gilt: $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.
- c) Für alle $x \in K$ gilt: $x \cdot 0 = 0$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Es sei $M = \{u, g\}$ eine Menge mit verschiedenen Elementen u und g . Auf M wird eine Addition $+$ und eine Multiplikation \cdot erklärt durch:

$$\begin{array}{c|cc} + & g & u \\ \hline g & g & u \\ u & u & g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & g & u \\ \hline g & g & g \\ u & g & u \end{array}$$

Man weise nach, dass M mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist.