Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 15.11.1999

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 4

Abgabe: **Montag, 22.11.1999**

Aufgabe 1: (6 Punkte)

a) Sei V ein K-Vektorraum, I eine beliebige (nicht-leere) Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei W_i ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} W_i := \{v \in V : \ v \in W_i \text{ für alle } i \in I\}$$

wieder ein Untervektorraum ist.

b) Sei V ein K-Vektorraum und seien W_0 und W_1 Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass $W_0 \cup W_1$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $W_0 \subset W_1$ oder $W_1 \subset W_0$ gilt.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Seien V und W K-Vektorräume. Sei $T : V \to W$ eine K–lineare Abbildung, d.h.

(i) $T(kv) = kT(v)$, für alle $k \in K, v \in V$,

(ii) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, für alle $v_1, v_2 \in V$.

Zeigen Sie, dass

$$X := \{v \in V \ : \ T(v) = 0\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei K ein Körper und I eine (nicht leere) Indexmenge I. Sei $\mathrm{Abb}_0(I, K)$ die Menge der Abbildungen $f : I \to K$, bei denen nur endlich viele Elemente von I auf ein von Null verschiedenes Körperelement abgebildet werden.

a) Man zeige, dass $\mathrm{Abb}_0(I, K)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(I, K)$ ist.

b) Für jedes $i \in I$ sei $e_i \in \mathrm{Abb}_0(I, K)$ definiert durch

$$e_i(j) := \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die lineare Hülle dieser Abbildungen $L(\{e_i : i \in I\})$ mit $\mathrm{Abb}_0(I, K)$ übereinstimmt.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei $P(\mathbb{R})$ der Raum der Polynome (mit reellen Koeffizienten) mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Man macht sich leicht klar, dass $P(\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. (Dies muss nicht bewiesen werden!).
Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume von $P(\mathbb{R})$ sind:

a) $W := \{f \in P(\mathbb{R}) : \text{der Grad von } f \text{ ist ungerade}\}$,

b) $X := \{f \in P(\mathbb{R}) : \text{der Grad von } f \text{ ist gerade}\}$,

c) $Y := \{f \in P(\mathbb{R}) : f(0) + f(1) = 0\}$.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Ausgehend von Aufgabe 4, sei

$$Z := \{f \in P(\mathbb{R}) : \ f(j) = 0 \quad \text{für alle} \quad j \in \{0, 1, \ldots, 10\}\}.$$

Zeigen Sie **unter Benutzung** von Aufgabe 1 und 2, dass Z ein Untervektorraum ist.