Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 22.11.1999

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 5

Abgabe: **Montag, 29.11.1999**

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Man ermittle Basen der Zeilenräume der folgenden Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & 11 & 10 & -1 \\ 2 & 8 & 11 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & 4 & 8 & -2 \\ 3 & -9 & 1 & 8 & 11 & -1 \\ 5 & -15 & 1 & 8 & 21 & 5 \\ 2 & -6 & 3 & 10 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Man untersuche die folgenden Systeme $S = (v_1, v_2, ..., v_m)$ jeweils auf lineare Unabhängigkeit:

a) $v_1 = (1,1,1,0),\ v_2 = (1,1,2,0),\ v_3 = (1,2,1,0),\ v_4 = (2,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$,

b) $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ beliebig,

c) $v_1 = (1,1,2,2), v_2 = (2,2,1,1), v_3 = (1,2,2,1) \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben sei eine Menge X. Eine Teilmenge $R \subset X \times X$ heißt **Relation** auf X. Gilt $(x,y) \in R$, so sagt man "x steht in Relation R mit y ". Meist bezeichnet man eine Relation einfach mit "$\sim$" und schreibt $x \sim y$ statt $(x,y) \in R$. Besitzt $\sim$ weiterhin für alle $x, y, z \in X$ die Eigenschaften

(i) $x \sim x$ ($\sim$ ist reflexiv),

(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ ($\sim$ ist symmetrisch),

(iii) $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ ($\sim$ ist transitiv),

so nennt man $\sim$ **Äquivalenzrelation**.

a) Sei W ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass

$$v_1 \sim v_2 \quad :\Leftrightarrow \quad v_1 - v_2 \in W$$

mit $v_1, v_2 \in V$ eine Äquivalenzrelation definiert.

b) Sei $\sim$ nun seine Äquivalenzrelation. Für $v \in V$ bezeichnen wir dann mit $\widehat{v} := \{w \in V : \; w \sim v\}$ die sogenannte Äquivalenzklasse von v.

Beweisen Sie: Für $v_1, v_2 \in V$ gilt entweder $\widehat{v_1} = \widehat{v_2}$ oder $\widehat{v_1} \cap \widehat{v_2} = \emptyset$, d.h. zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Seien U und W Untervektorräme von V. Sei $\{u_1, \dots, u_m\}$ eine Basis von U und $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von W.
Sei weiterhin $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R}^{m+n}$ eine Basis des Lösungsraumes des homogenen Gleichungssystems in V

$$x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m + x_{m+1} w_1 + \cdots + x_{m+n} w_n = 0. \qquad (*)$$

Geben Sie mit Hilfe von $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots w_n, b_1, \dots, b_r$ eine Basis von $U \cap W$ an.
Hinweis: Stellen Sie einen beliebigen Vektor $v \in U \cap W$ sowohl mit Hilfe von $u_1, \dots, u_m$ als auch von $w_1, \dots, w_n$ dar. Welche Beziehung erfüllen dann die Koeffizienten in dieser Darstellung? Durch geschicktes Einsetzen erhält man zwei erzeugende Systeme von $U \cap W$, eins ausgedrückt in $u_1, \dots, u_m$ und eins in $w_1, \dots, w_m$. Unter Verwendung von $(*)$ kann man zeigen, dass es sich hierbei um Basen handelt.