Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

29.11.1999

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 6

Abgabe: **Montag, 06.12.1999**

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Sei I eine beliebige Indexmenge und K ein Körper. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) I ist endlich.

(ii) $\mathrm{Abb}_0(I, K) = \mathrm{Abb}(I, K)$.

(iii) $\mathrm{Abb}(I, K)$ ist endlich dimensional.

(iv) $\mathrm{Abb}_0(I, K)$ ist endlich dimensional.

Für den Fall, dass I endlich ist, beweisen Sie weiterhin

$$\dim(\mathrm{Abb}(I, K)) = \dim(\mathrm{Abb}_0(I, K)) = |I|,$$

wobei $|I| :=$ „Anzahl der Elemente von I“.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Seien V und W K-Vektorräume. Sei $F : V \to W$ eine K-lineare Abbildung (siehe Blatt 4, Aufgabe 2). Weiterhin sei U ein Untervektorraum von V und A_1, A_2 seien affine Unterräume von V. Zeigen Sie:

a) $F(U)$ ist ein Untervektorraum von W.

b) $F(A_1)$ ist ein affiner Unterraum von W.

c) Sind A_1 und A_2 parallel, so auch $F(A_1)$ und $F(A_2)$.

d) Geben Sie ein konkretes Beispiel für V, W, F, A_1 und A_2 an, so dass $F(A_1)$ und $F(A_2)$ parallel sind, aber A_1 und A_2 nicht.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

$A = p + U$ und $B = q + W$ seien affine Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Zeigen Sie:

a) Es gilt $A \cap B \neq \emptyset$ genau dann, wenn der Vektor $v := q - p$ zur Summe $U + W$ gehört, d. h. $q - p \in U + W$.

b) Sei $H = h+S$ eine affine Hyperebene von V, $D = d+T$ ein affiner Unterraum von V und D nicht parallel zu H. Dann ist $D \cap H$ nicht leer und es gilt

$$\dim(D \cap H) = \dim(D) - 1.$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Im $\mathbb{R}^5$ sei $U = L(v_1, v_2, v_3)$ und $W = L(w_1, w_2, w_3, w_4)$ mit

$$v_1 = (2, -1, 0, -2, 2), \qquad v_2 = (1, 2, -1, 1, 0), \qquad v_3 = (1, -8, 3, -7, 6),$$

$$w_1 = (2, -6, 2, -11, 11), \quad w_2 = (2, -1, 0, 3, -2),$$
$$w_3 = (1, 2, -1, 0, 2), \qquad w_4 = (-1, 8, -3, 11, -8).$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$. Berechnen Sie ausserdem $\dim(U \cap W)$.

Sonderaufgabe 5 (4 Sonderpunkte)

Bestimmen Sie ausgehend von Aufgabe 4 eine Basis von $U \cap W$.