Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 06.12.1999

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 7

Abgabe: **Montag, 13.12.1999**

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und W ein Untervektorraum. Wie in Aufgabe 3a von Blatt 5 definieren wir auf V eine Äquivalenzrelation durch

$$v \sim w \;:\Longleftrightarrow\; v - w \in W$$

mit $v, w \in V$.
Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit V/W, d.h.

$$V/W := \{\widehat{v} : v \in V\}.$$

a) Zeigen Sie, dass für $v \in V$ die Äquivalenzklasse $\widehat{v}$ genau der affine Unterraum $v + W$ ist. (Man schreibt deshalb auch oft $v + W$ statt $\widehat{v}$.)

b) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzrelation kompatibel mit der Addition und skalaren Multiplikation von V ist, d.h. beweisen Sie für $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ und $r \in K$, dass gilt:

   i) $(v_1 \sim w_1 \text{ und } v_2 \sim w_2) \quad \Longrightarrow \quad v_1 + v_2 \sim w_1 + w_2$,

   ii) $v_1 \sim w_1 \quad \Longrightarrow \quad rv_1 \sim rw_1$.

c) Ausgehend von (b), beweisen Sie, dass man auf V/W durch

   i) $\widehat{v} + \widehat{w} := \widehat{v + w}$

   ii) $r\widehat{v} := \widehat{rv}$

   mit $v, w \in V$ und $r \in K$ ein Addition und eine skalare Multiplikation erklären kann. (Sie müssen hierfür zeigen, dass das Ergebnis der oben definierten Verknüpfungen (Addition bzw. skalare Multiplikation) unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. Nur dann ist die obige Definition nämlich eindeutig und macht damit Sinn. Wählen Sie also verschiedene Repräsentanten $v_1, v_2 \in \widehat{v}$ und $w_1, w_2 \in \widehat{w}$ ist, und zeigen Sie, dass $\widehat{v_1 + w_1} = \widehat{v_2 + w_2}$ und $\widehat{rv_1} = \widehat{rv_2}$ ist.)

d) Zeigen Sie, dass V/W auf diese Weise zum K-Vektorraum wird. Man nennt den so definierten Vektorraum V/W auch den Quotientenraum von V nach W.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Eine Matrix $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch* genau dann, wenn $s_{ij} = s_{ji}$ für alle $i, j = 1, \cdots, n$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\; A \text{ symmetrisch}\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ und geben Sie eine Basis an.

b) Die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als die Summe der Diagonalelemente, also

$$\text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Zeigen Sie, dass

$$X := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\; \text{Spur}(A) = 0\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist und bestimmen Sie seine Dimension.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum. Die Abbildung $T : \mathcal{L}(K, V) \to V$ sei definiert durch

$$T(\varphi) := \varphi(1) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{L}(K, V).$$

($\mathcal{L}(K, V)$ ist der K-Vektorraum der K-linearen Abbildungen von K nach V.) Zeigen Sie, dass T ein Isomorphisums ist.