Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 13.12.1999

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Blatt 8

Abgabe: **Montag, 20.12.1999**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Für Matrizen $A \in K^{m\times n}$ zeige man:

a) Gilt $m > n$, so gibt es ein Element $b \in K^m$, für welches das System $Ax = b$ unlösbar ist.

b) Gilt $m < n$, so hat das homogene System $Ax = 0$ nicht–triviale Lösungen.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch Multiplikation mit

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1, \end{pmatrix},$$

d.h. $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$. Seien $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bzw. $G = \{w_1, w_2, w_3\}$ die durch

$$v_1 = (1,-1,0,0)^T, \quad v_2 = (0,0,0,1)^T, \quad v_3 = (1,1,0,0)^T, \quad v_4 = (0,0,1,1)^T,$$
$$w_1 = (0,0,1)^T, \qquad w_2 = (0,1,1)^T, \qquad w_3 = (1,1,1)^T$$

gegebenen Basen des $\mathbb{R}^4$ bzw. des $\mathbb{R}^3$. Man berechne f bezüglich

a) F und der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$,

b) der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ und G,

c) F und G.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Man gebe eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ vom Rang 3 und ein $b \in \mathbb{R}^4$ an, so dass $Ax = b$ unlösbar ist.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix. Unter einer *Teilmatrix* von A versteht man eine Matrix B, die aus A durch Streichen einiger Zeilen und Spalten hervorgeht. Man zeige:

a) Ist B eine Teilmatrix von A, so gilt $\mathrm{Rang}(B) \le \mathrm{Rang}(A)$.

b) Sei $s := \operatorname{Rang}(A)$, dann gibt es eine quadratische Teilmatrix $B \in K^{s \times s}$ von A, so dass $\operatorname{Rang}(B) = s$ ist.

c) Der Rang von A ist die größte Zahl r, zu der es eine quadratische Teilmatrix $B \in K^{r \times r}$ von A gibt mit $\operatorname{Rang}(B) = r$.

(Natürlich können Sie bei der Lösung einer Teilaufgabe immer alle vorherigen Aufgabenteile benutzten, auch wenn Sie am Beweis der vorherigen Aufgabenteile scheitern sollten. Lassen Sie sich also z.B. nicht von Teil c) abhalten, wenn sie an Teil a) oder Teil b) scheitern!)