Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

20.12.1999

Lineare Algebra I

WS 1999/2000 — Wiederholung — Blatt 9

Abgabe: **Montag, 10.1.2000**

Dieser Aufgabenzettel soll Ihnen helfen, den bisherigen Stoff zu wiederholen. Obwohl es für diesen Zettel keine Punkte gibt, sollten Sie die Gelegenheit wahrnehmen möglichst viele Aufgaben auf diesem Zettel selbstständig zu lösen. Konzentrieren Sie sich besonders auf die Aufgaben, bei denen Sie sich noch unsicher fühlen. Lösungen die am obigen Datum abgeben werden, werden von den Tutoren korrigiert und in den Übungen besprochen. Wenn Sie Probleme mit den Aufgaben haben, sollten Sie diese in den Übungen auf jeden Fall zur Sprache bringen.

Aufgabe 1 (Gleichungssysteme)
Geben Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ an, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Sei $b := (7, 9, -2, -2)^T$. Prüfen Sie, ob das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist und geben Sie (im Falle der Lösbarkeit) den Lösungsraum an. (Wenden Sie bei dieser Aufgabe auf jeden Fall das Eliminationsverfahren an, denn dieses sollte man sicher beherrschen!)

Aufgabe 2 (logische Aussagen)
Negieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\exists\, C > 0\; \forall\, x, y \in X : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$,

(b) $\forall\, k \in K\; \exists\, n \in \mathbb{N} : n > k$.

Aufgabe 3 (Vektorräume)
Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner gleich n. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume von $P_n(\mathbb{R})$ sind:

(i) $\{f \in P_n(\mathbb{R}) \;:\; f(0) \cdot f(1) = 0\}$,

(ii) $\{f \in P_n(\mathbb{R}) \;:\; f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0\}$,

(iii) $\{f \in P_n(\mathbb{R}) \;:\;$ es existiert $g \in P_{n-1}(\mathbb{R})$ mit $f(x) = x \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 4 (Basis, Summe/Schnitt von Vektorräumen, Dimensionsformel)
Gegeben seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} u_1 &:= (0,0,0,2,-1)^T, & u_2 &:= (0,1,-2,1,0)^T, \\ u_3 &:= (0,-1,2,1,-1)^T, & u_4 &:= (0,0,0,1,2)^T, \\ w_1 &:= (1,0,2,0,1)^T, & w_2 &:= (2,1,2,0,1)^T, \quad w_3 := (-1,1,2,1,2)^T. \end{aligned}$$

Sei $U := L(\{u_1, u_2, u_3, u_4\})$ und $W := L(\{w_1, w_2, w_3\})$. Bestimmen Sie die Dimension von U bzw. W und geben Sie eine Basis von U bzw. W an. Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$ und geben Sie die Dimension von $U \cap W$ an.

Aufgabe 5 (Lineare Abbildungen, Dimensionsformel)
Gegeben sei die Abbildung $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$T((a_{ij})) := (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})^T,$$

d.h. T bildet eine Matrix auf ihre Diagonale (als Vektor) ab. Zeigen Sie, dass T eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie die Dimension von $Y := \{T(A) : A \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ und $X := \{A : T(A) = 0\}$.

Aufgabe 6 (Äquivalenzrelation)
Auf $\mathbb{R}^{3\times 3}$ sei folgende Relation $\sim$ eingeführt:

$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad (A \cdot B = B \cdot A).$$

Überprüfen Sie jeweils, ob $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (siehe Blatt 5, Aufgabe 3). Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 7 (Basiswechsel)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die folgendermaßen definierte Abbildung:

$$f : (x,y,z) \mapsto (x - y + z, -6y + 12z, -2x + 2y - 2z).$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $M_S^S(f)$ und $M_B^B(f)$ von f bezüglich folgender Basen:

$$\begin{aligned} S &= \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}, \\ B &= \{(-1,0,1)^T, (-1,2,1)^T, (-2,0,4)^T\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (direkte Summe)
Sei V ein K–Vektorraum und U, W seien Untervektorräume mit $V = U \oplus W$.
Zeigen Sie:
Sind $u_1, \dots, u_n \in U$ linear unabhängig und $w_1, \dots, w_m$ linear unabhängig, so sind auch $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$ linear unabhängig.

Aufgabe 9 (Matrizenmultiplikation und Spur)
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -13 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$, $B \cdot A$, $\mathrm{Spur}(A \cdot B)$, $\mathrm{Spur}(B \cdot A)$ und A^{-1}. (Zur Definition der Spur siehe Blatt 7, Aufgabe 2b.)