Albert-Ludwigs-Universität Freiburg • D-79085 Freiburg

Albert-Ludwigs-
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

Prof. Dr. M. Růžička
Wintersemester 99/00

21.02.2000

Geschrieben von Ralf Wimmer

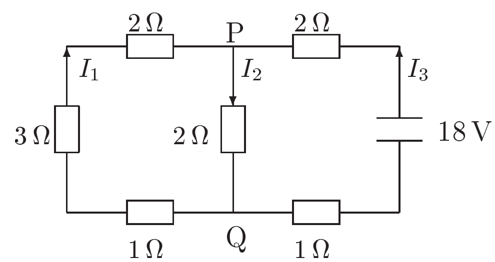
Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lineare Gleichungssysteme

1.1 Anwendungen und Beispiele

Berechnung von Stromkreisen



1.) Ohm'sches Gesetz:

$$U = I \cdot R$$

2.) 1. Kirchhoff'sches Gesetz:

$$\sum I_{in} = \sum I_{out}$$

Summe der Ströme, die in einen Knoten hineinfließen, ist gleich der Summe der Ströme, die aus einem Knoten hinausfließen.

3.) 2. Kirchhof'sches Gesetz:

$$\sum U_i = \sum U_q$$

Summe der Spannungen an den Stromquellen in einem geschlossenen Stromkreis ist gleich der Spannungen an den Widerständen (s. Ohm'sches Gesetz) in diesem Stromkreis.

Knoten P: $I_1 + I_3 = I_2$
Knoten Q: $I_2 = I_1 + I_3$
1. Stromkreis: $18\,V = 3 \cdot I_3 + 2 \cdot I_2$
2. Stromkreis: $0\,V = 6 \cdot I_1 + 2 \cdot I_2$

$\Rightarrow$ Liefert ein lineares Gleichungssystem mit den Lösungen:

$$I_1 = -1 \quad I_2 = 3 \quad I_3 = 4$$

Kryptographie

- Jedem Zeichen wird seine Position im Alphabet zugeordnet:

A	B	C	D	...	Y	Z		?	!
0	1	2	3	...	24	25	26	27	28

- Botschaft soll verschlüsselt werden:

GOOD LUCK $\Longrightarrow$ 6; 14; 14; 3; 26; 11; 20; 2; 10

Bilde Dreiergruppen: $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 26 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

Dreiergruppe soll verschlüssel werden: $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ 2m_1 + m_2 \\ m_1 + m_2 + m_3 \end{pmatrix}$

Verschlüsselte Botschaft: 6; 26; 34; 3; 32; 40; 20; 42; 32

- Verschlüsselte Botschaft soll entschlüsselt werden:

19; 45; 26; 13; 36; 41

Wir suchen $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ derart, daß:

$$\begin{aligned} m_1 &= 19 \\ 2m_1 + m_2 &= 45 \\ m_1 + m_2 + m_3 &= 26 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lösung: 19; 7; 0; 13; 10; 18 $\Longrightarrow$ THANKS.

Ökonomie

Im Idealfall gilt: Angebot = Nachfrage. Die Nachfrage eines best. Industrieprodukts setzt sich zusammen aus der Nachfrage aus der eigenen Ökonomie und der Nachfrage durch Export und Konsum.
Wir führen folgende Bezeichnungen für verschiedene Industriezweige ein:

$I_1 :=$ Autoindustrie
$I_2 :=$ Stahlindustrie
$I_3 :=$ Ölindustrie
x_i bezeichne die Produktion von I_i $(i = 1 \ldots 3)$

Für die Aufteilung der Produktion der Autoindustrie auf die einzelnen Industriezweige gelte z. B.:

- 30% $\rightarrow I_1$ • 20% $\rightarrow I_2$ • 30% $\rightarrow I_3$ • 30 Stück$\rightarrow$ Export

Dies liefert eine lineare Gleichung: $x_1 = 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 30$.
Entsprechendes gilt für die beiden anderen Industriezweige, d.h. es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen.

1.1 Definition: Lineare Gleichung

Eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.2}$$

heißt ***lineare Gleichung*** *in n Unbekannten x_i $(i = 1, \ldots, n)$, wobei $a_1,\ a_2, \ldots a_n$ die Koeffizienten sind und b die rechte Seite ist.*

Ein System von m linearen Gleichungen in n Unbekannten heißt ein ***lineares $m \times n$-Gleichungssystem****.* Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.3}$$

Beispiele:

a)

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & = & -9 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \end{array} \tag{1.4}$$

$$\cdot 4+ \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & \frac{5}{3}x_2 & = & -3 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcr} & x_1 & - & \frac{5}{3}x_2 & = & -3 \\ \cdot\left(-\frac{3}{11}\right) \mid & & & -\frac{11}{3}x_2 & = & -11 \end{array}$$

$$\cdot \tfrac{5}{3}+ \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & \frac{5}{3}x_2 & = & -3 \\ & & x_2 & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & & = & 2 \\ & x_2 & = & 3 \end{array}$$

Falls (1.3) eine Lösung besitzt, dann ist diese $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.
$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem (1.3) besitzt höchstens eine Lösung.
Einsetzen der Lösung in das Gleichungssystem liefert, daß $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ wirklich eine Lösung ist, d. h. es existiert genau eine Lösung.

b)

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 6 \\ 4x_1 & + & 10x_2 & = & 10 \end{array} \tag{1.5}$$

$$\cdot(-4)+ \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & \frac{5}{2}x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 10x_2 & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & \frac{5}{2}x_2 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & = & -2 \end{array} \qquad \text{Widerspruch !!}$$

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

c)

$$\begin{array}{rcrcr} \frac{3}{4}x_1 & - & 7x_2 & = & -6 \\ \frac{9}{2}x_1 & - & 42x_2 & = & -36 \end{array} \tag{1.6}$$

$$\cdot\left(-\tfrac{9}{2}\right)+ \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & \frac{28}{3}x_2 & = & -8 \\ \frac{9}{2}x_1 & - & 42x_2 & = & -36 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & \frac{28}{3}x_2 & = & -8 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & = & 0 \end{array}$$

Jeder Wert für x_1 und x_2 ist Lösung der zweiten Gleichung. Man wähle einen Parameter für x_2, der jedem Wert annehmen kann, z. B. $x_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}$. Dann folgt aus der 1. Gleichung für x_1 durch Einsetzen: $x_1 = -8 + \frac{28}{3}t$. D. h. das Gleichungssystem (1.5) besitzt unendlich viele Lösungen.

d)

$$\cdot 4+ \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ -4x_1 & - & x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \end{array}$$

$$\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+ \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ -4x_1 & - & x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Es darf ein Parameter aus $\mathbb{R}$ beliebig gewählt werden: setze $x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$. Dann ergibt sich für die Lösung des Gleichungssystems

$$x_1 = 5 - 3t, \qquad x_2 = 2t, \qquad x_3 = t.$$

e)

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 5$$

Es dürfen 2 Parameter gewählt werden; wähle $x_2 = t,\ x_3 = s, \quad s, t \in \mathbb{R}$. Dann ergibt sich als Lösung für die Gleichung:

$$x_1 = 5 + t - 5s, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = s.$$

1.2 Das Eliminationsverfahren

Zuerst sollen hier verschiedene Schreibweisen für lineare Gleichungssysteme eingeführt werden:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.7}$$

Kürzer läßt sich ein lineares Gleichungssystem auf die folgende Weise schreiben:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad i = 1 \ldots n \tag{1.7a}$$

Diese Schreibweise ist gleichbedeutend mit:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1 \ldots n \tag{1.7b}$$

Um sich beim Rechnen Schreibarbeit zu sparen, hat sich die Schreibweise des Gleichungssystems (1.6) als Schema bewährt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.8}$$

1.9 Definition:

elementare Umformung

Unter einer ***elementaren Umformung*** *des Schemas eines Gleichungssystems versteht man eine der folgenden Umformungen:*

1. *Multiplikation einer Zeile mit einer von* 0 *verschiedenen Zahl*
2. *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile*
3. *Vertauschen zweier Zeilen.*

Man kann die elementaren Umformungen zum **Ausräumen** einer Spalte benutzen, d. h. ein Koeffizient in der Spalte ist gleich 1, alle anderen sind gleich 0.

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & -3 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & -3 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & -3 \end{array}\right)$$

1.10 Satz:

Geht ein Schema aus einem anderen Schema durch Elementarumformungen hervor, so haben die zugehörigen Gleichungssysteme dieselben Lösungen.

Beweis:

Die Behauptung besteht aus zwei Teilaussagen:

1. keine Lösung geht verloren, d. h. jede Lösung des alten Systems ist auch Lösung des neuen Systems.
2. keine Lösung kommt hinzu, d. h. jede Lösung des neuen Systems ist auch Lösung des alten Systems.

Wir zeigen, daß jede Elementarumformung rückgängig gemacht werden kann. Dann genügt es zu zeigen, daß die Behauptung (1) gilt.

- Elementarumformungen können rückgängig gemacht werden:
  1. Multiplikation der i-ten Zeile mit $t \neq 0$:
     Multiplikation der i-ten Zeile mit $\frac{1}{t}$.
  2. Addition des t-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile:
     Addition des $-t$-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile.
  3. Vertauschen zweier Zeilen:
     Dieselben Zeilen nochmals vertauschen.
- Durch Elementarumformungen gehen keine Lösungen verloren:
  1. Trivial.
  2. Sei $s_1, \ldots, s_n$ eine Lösung und $i \neq j$. Addiere das t-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile. Dann ergibt sich:
     $(ta_{i1} + a_{j1})s_1 + (ta_{i2} + a_{j2})s_2 + \cdots + (ta_{in} + a_{jn})s_n = tb_i + b_j$,
     d. h. $s_1, \ldots, s_n$ ist eine Lösung des neuen Schemas.
  3. Trivial, denn Vertauschen von Zeilen ändert Lösungen nicht.

$\square$

Beispiele:

a)
$$\begin{array}{ccccccc} & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -\frac{3}{2} & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{6} & -8 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{31} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{31} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{48}{31} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{21}{31} \\ x_2 = -\frac{1}{31} \\ x_3 = -\frac{48}{31} \end{array}$$

b)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & -9 \\ 3 & -3 & 4 & 8 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Lösung des Gleichungssystems: $x_1 = 2 + t,\ x_2 = t,\ x_3 = -1,\ x_4 = 2$.

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 6 & -9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -5 & 6 & -9 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$ Es existiert keine Lösung.

Das Eliminationsverfahren

Ausgangspunkt ist ein Gleichungssystem, das in Schemaform gegeben ist:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

1. Schritt:
Suche die erste Spalte, die einen Eintrag $\neq 0$ hat. Sei dies die j_1. Spalte. Vertausche die Zeilen derart, daß der Eintrag in der 1. Zeile steht. Räume dann die j_1. Spalte aus. Die Buchführungsmenge D sei dann $D = \{j_1\}$.

2. Schritt:
Suche die erste Spalte, die unterhalb der 1. Zeile einen Eintrag $\neq 0$ besitzt; sei dies die Spalte j_2 ($j_2 > j_1$). Vertausche, falls nötig, zwei Zeilen mit Index ≥ 2 so, daß jetzt in der 2. Zeile in der j_2-ten Spalte ein Eintrag $\neq 0$ steht. Räume jetzt die j_2. Spalte aus. Die Buchführungsmenge lautet dann: $D = \{j_1, j_2\}$.

Nach k Schritten:
Die Buchführungsmenge lautet: $D = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ mit $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. Alle Spalten mit einem Index $j_i \in D$ sind ausgeräumt.

$(k+1)$. Schritt:
Suche die erste Spalte, in der ein Eintrag $\neq 0$ unterhalb der k-ten Zeile steht. Dies sei dies Spalte mit der Nummer j_{k+1}. Vertausche eventuell Zeilen mit Index $> k$ derart, daß in der (k+1). Zeile in der j_{k+1}. Spalte ein Eintrag $\neq 0$ steht. Räume die j_{k+1}. Spalte aus. Die Buchführungsmenge lautet dann $D = \{j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1}\}$.

Ergebnis der Elimination:
Die Buchführungsmenge lautet $D = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$, $\quad r \leq \min\{m, n\}$. Das System befindet sich in Stufenform.

Beispiel:

Gegeben sei ein Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 10 Unbekannten, nach der Elimination habe die Buchführungsmenge die folgende Form: $D = \{1,5,8,9\}$. Dann muß das Gleichungssystem in Stufenform folgendermaßen aussehen:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & ? & ? & ? & 0 & ? & ? & 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ? & ? & 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{array}\right)$$

Eigenschaften eines Schemas in Stufenform:

- Alle Spalten mit einem Index $j \in D$ sind ausgeräumt.
- Sei k der Index einer Zeile, l der Index einer Spalte. Dann gilt:
  a) $k \le r$.
  $* \; l < j_k \quad \Rightarrow \quad a'_{kl} = 0$
  $* \; l = j_k \quad \Rightarrow \quad a'_{kl} = 1$
  $* \; l > j_k \quad \Rightarrow \quad a'_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{falls } l \in D \\ ? & \text{falls } l \notin D \end{cases}$
  b) $k > r$.
  Alle Koeffizienten sind $= 0$, d. h. $a_{kl} = 0 \quad l = 1 \ldots n$. Über die rechte Seite kann keine Aussage gemacht werden.

1.11 Satz:

Sei ein Schema in Stufenform mit der Buchführungsmenge $D = \{j_1, \ldots, j_r\}$. Dann besitzt das zugehörige Gleichungssystem genau dann Lösungen, wenn alle Absolutglieder $b_i = 0$ sind für $i > r$.

Beweis:

Zu zeigen: $\exists$ Lösung $\quad \Leftrightarrow \quad \forall i > r: \quad b_i = 0$.

"$\Leftarrow$": Sei $b_i = 0 \; \forall i > r$. Zu zeigen: $\exists$ Lösung.
Wir zeigen die Behauptung durch Angabe einer Lösung. $s_1, \ldots, s_n$ ist eine Lösung, wenn gilt:
- $s_i = 0$, falls $i \notin D$.
- $s_{j_k} = b_k$, falls $j_k \in D$.

"$\Rightarrow$": Zu zeigen: $\exists i > r : b_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ keine Lösung.
Wir wissen, daß für $i > r$ alle Koeffizienten in der i-ten Gleichung $= 0$ sind. Die i-te Gleichung lautet dann:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_i \neq 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

$\square$

Beispiel:

Gegeben ist ein 4×8-Gleichungssystem in Stufenform. Buchführungsmenge $D = \{2, 4, 7, 8\}$, d. h. $r = 4$. $n - r = 4$, d. h. es dürfen vier Parameter gewählt werden:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Wähle Parameter: $x_1 = s,\ x_3 = t, x_5 = u, x_6 = v$. Damit ergibt sich für die anderen Variablen: $x_2 = 6 + 2t + 3u,\ x_4 = 4 - 2u - 4v,\ x_7 = 3, x_8 = 2$. Diese Lösungen lassen sich auch folgendermaßen als Lösungsmenge schreiben:

$$L = \big\{(s,\, 6 + 2t + 3u,\, t,\, 4 + 2u + 4v,\, u,\, v,\, 3,\, 2) \,\big|\, s,\, t,\, u,\, v \in \mathbb{R}\big\}$$

1.12 Satz:
Ist n die Anzahl der Unbekannten und ist das System lösbar, so werden die Lösungen durch $(n-r)$ Parameter beschrieben, wobei r die Anzahl der Elemente der Buchführungsmenge ist.

Beweis:

Konstruiere Lösungen s_l und zeige, daß sie tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems sind.
- $j \notin D$: setze $x_j = s_j$ mit $s_j \in \mathbb{R}$ beliebig.
- $j_k \in D$: setze $x_{j_k} = s_{j_k} := b_k - \sum\limits_{l \notin D} a_{kl} s_l$

Zu zeigen ist: $s_l,\ l = 1 \dots n$ ist eine Lösung.
Aus der Charakterisierung des Stufenschemas folgt:
$a_{kj_k} = 1,\ a_{lk} = 0$ für $l \in D,\ l \neq j_k$.
$\Rightarrow \quad \sum\limits_{l=1}^{n} a_{lk} s_l = b_k \quad \Rightarrow \quad s_l$ ist eine Lösung. $\square$

1.13 Satz:
Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es lösbar ist und $n = r$, d. h. $D = \{1, 2, \dots, n\}$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei das System eindeutig lösbar. $\Rightarrow$ es ist lösbar und es dürfen keine Parameter gewählt werden, d. h. $n - r = 0$. $\Rightarrow\ n = r$.

"$\Leftarrow$" Sei das System lösbar und $n = r$. $\Rightarrow\ n - r = 0$, d. h. es dürfen keine Parameter gewählt werden. $\Rightarrow$ Eindeutigkeit. $\square$

1.14 Folgerung:
Sei $m = n$, d. h. wir haben ein quadratisches System. Dann ist das System eindeutig lösbar genau dann, wenn $n = r$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei das System eindeutig lösbar. Die Beh. folgt aus Satz (1.13).

"$\Leftarrow$" Nach Satz (1.11) gilt: Das System ist lösbar, wenn für alle $i > r$ $b_i = 0$ ist. Aber nach Voraussetzung ist $r = n$, d. h. es gibt kein $i > r$. Daraus folgt, daß das System lösbar ist. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus Satz (1.13). $\square$

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Mit Hilfe des Eliminationsverfahrens bringt man das Gleichungssystem auf Stufenform:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Damit ergibt sich als Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v,\ \frac{1}{3} - \frac{5}{3}u - \frac{1}{3}v,\ u,\ v\ \right) \,\middle|\, u,\ v \in \mathbb{R} \right\}$$

1.3 n-Tupel und Matrizen

- n-Tupel
  - Seien M, N Mengen. Die Menge aller 2-Tupel (Paare) wird dann bezeichnet mit:
  $$M \times N := \big\{ (a, b) \;\big|\; a \in M \wedge b \in N \big\}$$
  - Seien $M_1,\ M_2, \ldots,\ M_n$ beliebige Mengen. Man bezeichnet die Elemente der Menge
  $$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n := \big\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \;\big|\; a_1 \in M_1 \wedge a_2 \in M_2 \wedge \cdots \wedge a_n \in M_n \big\}$$
  als ***n*-Tupel**.
  - Für gewöhnlich schreibt man:
  $$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
  $$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

  – Zwei n-Tupel sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Einträge besitzen, d. h.

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i = 1 \dots n: \quad a_i = b_i$$

- Sei M eine Menge. Dann definieren wir:

$$M^n := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{\text{n-Mal}}$$

- Anwendung auf lineare Gleichungssysteme
  – j-te Spalte: $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ ist ein m-Tupel.
  – i-te Zeile: $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ist ein n-Tupel.
  – rechte Seite: $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ ist ein m-Tupel.
  – Lösung: $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ist ein n-Tupel.

1.15 Definition:

*Seien $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ zwei n-Tupel und $r \in \mathbb{R}$. Die **Summe der n-Tupel** a und b, in Zeichen $a + b$ wird definiert als*

Addition

$$a + b := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

*Die **Multiplikation des n-Tupels** a mit r, in Zeichen ra, ist definiert durch*

Skalarmultiplikation von n-Tupeln

$$ra := (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$$

Die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^n$.

Beispiele

$(2, -1, 0, 3) + (1, 2, 5, 0) = (3, 1, 5, 3)$
$\frac{1}{2}(2, 4, 6) = (1, 2, 3)$

Bezeichnungen:

a) $(0, 0, 0, \dots, 0) =: \underline{0}$ heißt **Nulltupel**

Nulltupel

b) Sei $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ein n-Tupel. Dann heißt

$$-a := (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) = (-1) \cdot a$$

das **Negative** zu a.

Negatives

c) $a_1, \dots, a_k$ seien n-Tupel und $r_1, \dots, r_k$ reelle Zahlen. Dann heißt

$$a = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_k a_k = \sum_{i=1}^{k} r_i a_i$$

Linearkombination

Linearkombination von $a_1, \dots, a_k$.

d) Reelle Zahlen, mit denen n-Tupel multipliziert werden, heißen **Skalare**.

Skalare

Eigenschaften

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

— $(a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativität der Addition
— $a + b = b + a$ Kommutativität der Addition
— $a + \underline{0} = a$ Existenz des Nullvektors
— $a + (-a) = \underline{0}$ Existenz des Negativen
— $1 \cdot a = a$ Unitarität
— $r(sa) = (rs)a$ Assoziativität der Skalarmultiplikation
— $(r + s)a = ra + sa$ und $r(a + b) = ra + rb$ Distributivgesetze

Matrizen

1.16 Definition: $m \times n$-Matrix

Eine $\boldsymbol{m \times n}$***-Matrix*** *ist ein rechteckiges Schema der Form*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i, j$. *Die Menge aller* $m \times n$*-Matrizen wird mit* $\mathbb{R}^{m \times n}$ *bezeichnet.*

Eine Matrix ist ein spezielles $m \cdot n$-Tupel, d. h. Addition und Skalarmulitplikation sind bereits definiert.
Es gibt zwei Spezialfälle von Matrizen:

- $m = 1$, d. h. eine $1 \times n$-Matrix nennt man n-Zeilentupel
- $n = 1$, d. h. eine $m \times 1$-Matrix nennt man m-Spaltentupel.

1.17 Definition:

Produkt Matrix-Tupel

*Das **Produkt einer $m \times n$-Matrix A mit einem n-Spaltentupel c** ist ein m-Spaltentupel $Ac \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, dessen i-te Komponente folgendermaßen berechnet wird:*

$$(Ac)_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j.$$

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ nicht definiert!

Bemerkungen:

a) Betrachte lineares Gleichungssystem mit den Koeffizienten a_{ij} und rechten Seiten b_i:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungssystem kann dann folgendermaßen als Gleichung von m-Tupeln geschrieben werden:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b.$$

Die Lösung des Gleichungssystems $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ist dann eine Darstellung der rechten Seite b als Linearkombination der $A_1, \ldots, A_n$.

b) Definiert man auf folgende Art:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

dann läßt sich schreiben:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad Ax = b.$$

1.4 Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

1.18 Definition: homogen

*Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ heißt **homogen**, falls das m-Tupel $b \equiv \underline{0}$ ist. Anderenfalls heißt es **inhomogen**.* inhomogen

Bezeichnungen:

$L_H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \underline{0}\}$ Lösungsmenge des homogenen Systems.
$L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ Lösungsmenge des inhomogenen Systems.

1.19 Satz:

Für die Lösungsmenge L_H eines homogenen Gleichungssystems gilt:

a) $\underline{0} \in L_H$

b) $c, d \in L_H \quad \Rightarrow \quad c + d \in L_H$

c) $r \in \mathbb{R},\ c \in L_H \quad \Rightarrow \quad rc \in L_H$

Beweis:

Sei A_j die j-te Spalte von A. Dann lautet das Gleichungssystem:
$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b.$

a) $0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \cdots + 0 \cdot A_n = 0$

b) Seien c und d Lösungen des Gleichungssystems. Dann gilt:
$A_1 \cdot c_1 + \cdots + A_n \cdot c_n = 0$ und $A_1 \cdot d_1 + \cdots + A_n \cdot d_n = 0$. Addition dieser Gleichungen liefert: $A_1(c_1 + d_1) + \cdots + A_n(c_n + d_n) = 0$, d. h. $c + d \in L_H$.

c) Sei $r \in \mathbb{R}$ und $c \in L_H$. Dann gilt:
$c_1 \cdot A_1 + \cdots + c_n \cdot A_n = 0$. Multiplikation mit r liefert:
$rc_1 \cdot A_1 + \cdots + rc_n \cdot A_n = 0$, d. h. $rc \in L_H$.

□

Das homogene Gleichungssystem ist immer lösbar, da $\underline{0} \in L_H$.
$\underline{0} \in L_H \quad \Rightarrow \quad$ Gleichungssystem ist homogen.

1.20 Folgerung:

Die Lösungsmenge L_H ist abgeschlossen gegenüber der Bildung von Linearkombinationen, d. h. $\forall r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}\ \forall c_1, \ldots, c_k \in L_H$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot c_i \in L_H$$

Beweis:

Folgt direkt aus Satz 1.19. □

1.21 Satz:
Sei L die Lösungsmenge eines nicht notwendig homogenen Systems und sei $c_0 \in L$ eine spezielle Lösung. Dann gilt:

$$c \in L \quad \Leftrightarrow \quad c = c_0 + d, \quad \textit{wobei } d \in L_H$$

Die Lösungsmenge L läßt sich dann schreiben als:

$$L = c_0 + L_H$$

<u>Beweis:</u>

Sei $A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b$ ein lineares Gleichungssystem und sei $c_0 = (c_{0_1}, c_{0_2}, \ldots, c_{0_n})$ eine Lösung davon. Dann gilt:

$$c_{0_1}A_1 + c_{0_2}A_2 + \cdots + c_{0_n}A_n = b \tag{1.22}$$

Sei $c \in L \quad \Rightarrow \quad c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n = b$.
Subtrahiere (1.22):
$(c_1 - c_{0_1})A_1 + \cdots + (c_n - c_{0_n})A_n = 0$, d. h. das n-Tupel $(c - c_0) \in L_H$.
Setze $d := c - c_0$. Dann gilt: $c = c - c_0 + c_0 = c_0 + (c - c_0) = c_0 + d$.
Es gilt: $d_1A_1 + \cdots + d_nA_n = 0$.
Addiere (1.22):
$(c_{0_1} + d_1)A_1 + \cdots + (c_{0_n} + d_n)A_n = b$, d. h. $c_0 + d \in L$. □

1.23 Folgerung:
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem, welches überhaupt lösbar ist, d. h. $L \neq \emptyset$. Die Lösung ist genau dann eindeutig, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung hat, d. h. $L_H = \{\underline{0}\}$.

<u>Beweis:</u>

"$\Rightarrow$" Beweis durch Widerspruch:
Sei $\underline{0} \in L_H$, sei $d \neq \underline{0} \in L_H$. Das System ist eindeutig lösbar, d. h. $\exists!\ c \in L$.
Nach Satz 1.21 gilt: $c + \underline{0} = c$ ist Lösung und $c + d \neq c$ ist Lösung.
Widerspruch! $\Rightarrow \quad L_H = \{\underline{0}\}$.

"$\Leftarrow$" Nach Satz 1.21 gilt: $c \in L \quad \Rightarrow c = c_0 + d$, wobei $d \in L_H$. Da $L_H = \{\underline{0}\}$ gilt: $c = c_0 + \underline{0} = c_0$, d. h. die Lösung ist eindeutig bestimmt. □

Gegeben sei ein homogenes System in Stufenform:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Buchführungsmenge $D = \{1, 4, 5\},\ n = 6,\ r = 3,\ n - r = 3$.
Sei $d = (d_1, d_2, \ldots, d_6)$ eine Lösung des Gleichungssystems. Dann sind $d_2,\ d_3$ und d_6 frei wählbar, $d_1,\ d_4$ und d_5 sind aus den Gleichungen 1-3 berechenbar.

Allgemein gilt:
Sei ein System in Stufenform gegeben, die Buchführungsmenge $D = \{j_1, \dots j_r\}$.
Nach Satz 1.12 gilt dann:

- $j \notin D$: j-te Komponente der Lösungsmenge frei wählbar.
- $j_k \in D$: j_k-te Komponente der Lösungsmenge aus der k-ten Gleichung durch Wahl der Parameter eindeutig bestimmt.

1.24 Definition: Basislösung
Zu jedem $j \notin D$ heißt diejenige Lösung $d(j)$ ***Basislösung****, bei der die j-te Komponente 1 und alle anderen Komponenten mit einem Index $\notin D$ Null sind.*

Beispiel

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{Buchführungsmenge } D = \{1,4,5\} \quad n = 6,\ r = 3,\ n - r = 3$$

Für $x_2,\ x_3$ und x_6 dürfen Parameter gewählt werden. Um die Basislösung $d(i)$ zu bestimmen, wähle den Parameter für $x_i = 1$ und alle anderen Parameter gleich Null. Berechne dann aus den drei Gleichungen die Werte für die Variablen $x_1,\ x_4$ und x_5. Hier ergibt sich für die drei Basislösungen:

$$d(2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d(3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d(6) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zusammenhang der Basislösungen mit der allg. Lösung:
Allgemeine Lösung: $x_2 = s,\ x_3 = t,\ x_6 = u,\ x_1 = -2s - 3t - 4u,\ x_4 = -5u,\ x_5 = -6u$, d. h. als Lösung ergibt sich:

$$L_H = \begin{pmatrix} -2s-3t-4u \\ s \\ t \\ -5u \\ -6u \\ u \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.25 Satz: (Darstellungssatz)
L_H sei die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems, sei $D = \{j_1, \dots, j_r\}$ die Buchführungsmenge und $d(j)$ für $j \notin D$ die zugehörige Basislösung. Dann gilt:
Zu jeder Lösung $d \in L_H$ gibt es eindeutig bestimmte Skalare $t_j \in \mathbb{R},\ j \notin D$ mit

$$d = \sum_{j \notin D} t_j d(j) \tag{1.26}$$

Beweis:

Nach Konstruktion der Basislösungen gilt für $t_j d(j)$:
der Eintrag an der j-ten Stelle ist t_j, sonst 0 für alle Komponenten mit einem Index $\notin D$, d. h. für $d = \sum_{j \notin D} t_j d(j)$ gilt: $j \notin D \;\Rightarrow\; d_j = t_j$.
Nachweis der Eindeutigkeit:
Sei $e \in L_H$. Setze für $j \notin D$ $t_j := e_j$.
$d = \sum_{j \notin D} t_j e(j) \in L_H$
Aus obigen Feststellungen folgt: für $j \notin D$ gilt: $d_j = e_j = t_j$.
Nach Satz 1.12 ist eine Lösung durch $n - r$ Parameter festgelegt, d. h. $d_j = e_j$ für $j \in D \quad \Rightarrow \quad d = e$. □

Anwendung auf inhomogene Systeme

Beispiel: $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \end{array}\right)$.
Nach Satz 1.12 gilt: Die Lösung ist eindeutig bestimmt durch die Komponenten mit Index $\notin D$.
Man bestimmt auf folgende Art eine spezielle Lösung $d(0)$: Setze alle Parameter gleich Null.

Für dieses Beispiel gilt dann: $d(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Nach Satz 1.21 und Satz 1.25 gilt dann:
$c \in L \quad \Leftrightarrow \quad c =$ spezielle Lsg + bel. Lsg. des homog. Systems, d. h.
$c = d(0) + \sum_{j \notin D} t_j d(j)$.

1.27 Satz:

Sei L die Lösungsmenge eines inhomogenen Systems mit $D = \{j_1, \ldots, j_r\}$ als Buchführungsmenge, und seien $d(j)$ für $j \notin D$ die Basislösungen des zugehörigen homogenen Systems und $d(0)$ die oben konstruierte spezielle Lösung. Dann gilt für alle $v \in L$:

$$\exists!\, t_j \in \mathbb{R},\ j \notin D: \qquad v = d(0) + \sum_{j \notin D} t_j d(j) \tag{1.28}$$

Beweis:

siehe Herleitung oben. □

Kapitel 2

Vektorräume

2.1 Körper

2.1 Definition: Körper

*Ein **Körper** ist eine Menge K, in der für je zwei Elemente $r,\ s \in K$ eine Summe $r+s \in K$ und ein Produkt $rs \in K$ so erklärt sind, daß folgende Regeln gelten:*

K1: Assoziativität der Addition:
$$(r+s)+t = r+(s+t) \qquad \forall r,s,t \in K$$

K2: Kommutativität der Addition:
$$r+s = s+r \qquad \forall r,s \in K$$

K3: Existenz des Nullelements:
Es gibt ein Element $0 \in K$, so daß für alle $r \in K$ gilt: $0+r=r$.

K4: Existenz des Negativen:
Zu jedem $r \in K$ gibt es ein Element $-r \in K$ mit $r+(-r)=0$.

K5: Assoziativität der Multiplikation:
$$(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t) \qquad \forall r,s,t \in K$$

K6: Kommutativität der Multiplikation:
$$r \cdot s = s \cdot r \qquad \forall r,s \in K$$

K7: Existenz des Einselements:
Es gibt ein Element $1 \in K,\ 1 \neq 0$, so daß für alle $r \in K$ gilt: $1 \cdot r = r$.

K8: Existenz des Inversen:
Zu jedem von 0 verschiedenen Element $r \in K$ gibt es ein Element $r^{-1} \in K$ mit $r \cdot r^{-1} = 1$.

K9: Distributivität:
$$r(s+t) = rs+rt \qquad \forall r,s,t \in K$$

$(K,+)$ sei eine Menge, die die Axiome 1-4 erfüllt. Dann wird sie als **kommutative Gruppe** (Abelsche Gruppe) bezeichnet. Ebenso bildet $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ebenfalls eine kommutative Gruppe.

Man kann zeigen, daß in einem Körper das Nullelement eindeutig bestimmt ist:
Seien 0 und $0'$ Nullelemente, d. h. $0 + r = r$ und $0' + r = r$. Dann gilt:
$0 + 0' = 0$ (0' als Nullelement) und $0' + 0 = 0'$. (0 als Nullelement).
Nach dem Kommutativgesetz gilt: $0 + 0' = 0' + 0$. Daraus folgt: $0 = 0'$. □
Ebenso zeigt man, daß das Einselement eindeutig ist.

Beispiele:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bildet den Körper der reellen Zahlen
2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bildet den Körper der rationalen Zahlen
3. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bildet <u>keinen</u> Körper, sondern einen kommutativen Ring.
4. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ bildet mit den üblichen Verknüpfungen einen Körper.
   <u>Beweis:</u>
   - Abgeschlossenheit bzgl. Addition:
     Sei $r = a + b\sqrt{2}$ und $s = c + d\sqrt{2}$. Dann ist $r + s = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$.
   - Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation:
     $r \cdot s = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$.
   - Assoziativität, Kommutativität und Distributivität bzgl. Addition und Multiplikation gelten, da $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$ ist.
   - Nullelement:
     $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   - Negatives:
     Zu $r = a + b\sqrt{2}$ ist das Negative $-r = -a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   - Einselement:
     $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   - Inverses: Zu $r = a + b\sqrt{2}$ ist das Inverse:

     $$r^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

     Es bleibt zu zeigen, daß $a^2 - 2b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$:
     $a^2 - 2b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dies ist im Bereich der rationalen Zahlen nicht lösbar.

   Dies bedeutet, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Körper ist. □

Man kann Gleichungssysteme über einem beliebigen Körper angeben, d. h. alle a_{ij} und alle $b_i \in K$. Die Lösungen sind dann wieder $\in K$, wie man leicht sieht, da ein Körper abgeschlossen bzgl. Elementarumformungen ist.

2.2 Vektorräume

2.2 Definition: K-Vektorraum

*K sei ein Körper. Ein **K-Vektorraum** V ist eine Menge V, in der für je zwei Elemente $u, v \in V$ eine Summe $u + v$ und ein Vielfaches $rv \in V$, wobei $r \in K$ und $v \in V$, so erklärt sind, daß folgende Regeln gelten:*

V1: Assoziativität der Addition:

$$(u + v) + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in V$$

V2: Kommutativität der Addition:

$$u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V$$

V3: Existenz eines Nullvektors:

$$\exists\, \underline{0} \in V : \quad \underline{0} + v = v \qquad \forall v \in V$$

V4: Existenz des Negativen:
Zu jedem Element $v \in V$ existiert ein Element $-v \in V$, so daß gilt: $v + (-v) = \underline{0}$.

V5: Assoziativität der Skalarmultiplikation:

$$(rs)v = r(sv) \qquad \forall r, s \in K, \forall v \in V$$

V6: Unitarität:
Für das Einselement $1 \in K$ und für alle $v \in V$ gilt: $1 \cdot v = v$

V7: Distributivität:

1.) $$(r + s)v = rv + sv \qquad \forall r, s \in K, \forall v \in V$$

2.) $$r(v + w) = rv + rw \qquad \forall r \in K, \forall v, w \in V$$

*Die Elemente des K-Vektorraums heißen **Vektoren**, die Elemente des Körpers **Skalare**.*

Beispiele:

1. K sei ein Körper. Dann ist K^n ein Vektorraum.
   Spezialfall: $K = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^2$ oder $V = \mathbb{R}^3$.

2. $\mathrm{Abb}(M, V) := \{f \mid f : M \to V\}$, $M \subset K,\ V$ Vektorraum.
   Auf folgende Art werden Addition und Skalarmultiplikation erklärt:
   Seien $f, g \in \mathrm{Abb}(M, V)$. $(f + g)(m) = f(m) + g(m) \qquad \forall m \in M$.
   Sei $f \in \mathrm{Abb}(M, V),\ r \in K$. $(rf)(m) = r \cdot f(m) \qquad \forall m \in M$.

2.3 Satz:
Die Menge $\mathrm{Abb}(M, V)$ ist ein Vektorraum bezüglich der obigen Operationen.

<u>Beweis:</u>
Seien $f, g \in \mathrm{Abb}(M, V),\ r, s \in K, M \in M$.
V1: Zu zeigen: $(f + g) + h = f + (g + h)$:
$((f + g) + h)(m) = (f + g)(m) + h(m) = (f(m) + g(m)) + h(m) = f(m) + (g(m) + h(m)) = f(m) + (g + h)(m) = (f + (g + h))(m)$.

V2: Zu zeigen: $f + g = g + f$:
$(f + g)(m) = f(m) + g(m) = g(m) + f(m) = (g + f)(m)$

V3: Zu zeigen: $\exists \underline{0} : \quad f + \underline{0} = f$:
Definiere: $\underline{0} : M \to V : m \mapsto \underline{0}$.
$(\underline{0} + f)(m) = \underline{0}(m) + f(m) = \underline{0} + f(m) = f(m)$

V4: Zu zeigen: $\forall f \in \mathrm{Abb}(M, V) \exists - f : f + (-f) = \underline{0}$:
Definiere: $(-f)(m) := -f(m)$.
$(f + (-f))(m) = f(m) + (-f)(m) = f(m) + (-f(m)) = \underline{0}(m)$.

V5: Zu zeigen: $r(sf) = (rs)f$:
$(r(sf))(m) = r(sf)(m) = r(sf(m)) = (rs)f(m) = ((rs)f)(m)$.

V6: Zu zeigen: $1 \cdot f = f$:
$(1 \cdot f)(m) = 1 \cdot f(m) = f(m)$.

V7: Zu zeigen: $(r + s)f = rf + sf$ und $r(f + g) = rf + rg$:
1.) $((r+s)f)(m) = (r+s)f(m) = rf(m)+sf(m) = (rf)(m)+(sf)(m) = (rf + sf)(m)$
2.) $(r(f + g))(m) = r(f + g)(m) = r(f(m) + g(m)) = rf(m) + rg(m) = (rf)(m) + (rg)(m) = (rf + rg)(m)$.

$\square$

3. Polynome vom Grad n:
Sei $M \subset \mathbb{R}$, z. B. $M = [a, b]$. Die Polynome vom Grad n sind dann definiert als

$$P_n(M) := \{p \mid p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{R}, \forall x \in M\}$$

Addition und Skalarmultiplikation werden folgendermaßen erklärt:
Seien $p, q \in P_n(M),\ p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,\ r \in \mathbb{R}$.
Dann ist $p + q = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i$ und $rp = \sum_{i=0}^{n} (ra_i)x^i$.

Beh.: $P_n(M)$ ist ein Vektorraum.
Bew.: Z. z.: Abgeschlossenheit der Addition und Skalarmultiplikation:
Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, d. h. $p, q \in P_n(M)$.
Dann gilt: $p + q = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i \in P_n(M)$, $rp = \sum_{i=0}^{n} (ra_i)x^i \in P_n(M)$.
Da $P_n(M) \subset \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ ist, gelten V1, V2, V4, V5, V6, V7.
Noch zu zeigen: Existenz des Nullelements:
$0(x) = \sum_{i=0}^{n} 0x^i \in P_n(M)$. $\square$

4. Lösungsmenge L_H eines homogenen Gleichungssystems
   $L_H \subset K^n$, d. h. Addition und Skalarmultiplikation sind schon definiert.
   Nach Satz 1.19 gilt:
   $c, d \in L_H \quad \Rightarrow \quad c + d \in L_H$ und $r \in K, c \in L_H \quad \Rightarrow \quad rc \in L_H$.
   Überprüfung der Axiome V1 bis V7:

   – V1, V2, V5, V6, V7 sind bereits für K^n bewiesen, d. h. auch für Teilmengen.
   – V3: Es wurde gezeigt: $\underline{0} \in L_H$.
   – V4: Sei $c \in L_H \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot c = -c \in L_H$
     $c + (-c) = 1 \cdot c + (-1 \cdot c) = (1 + (-1)) \cdot c = 0 \cdot c = \underline{0}$.

□

2.4 Satz:

V sei ein Vektorraum. Für je zwei Elemente $u, v \in V$ hat die Gleichung $u+x = v$ genau eine Lösung $x \in V$.

<u>Beweis:</u>
Seien $u, v \in V$ fest, aber beliebig. Wähle ein festes Negatives $-u$ von u.
Es gibt eine Lösung $x := -u + v$:
$u + x = u + (-u + v) = (u + (-u)) + v = \underline{0} + v = v \qquad \Rightarrow \quad$ Existenz.
Eindeutigkeit:
Sei w eine Lösung der Gleichung, d. h. $u + w = v$. Dann gilt:
$-u + v = -u + (u + w) = (-u + u) + w = (u + (-u)) + w = \underline{0} + w = w$ □

Aus diesem Satz folgt die Eindeutigkeit des Nullvektors und des Negativen eines Vektors:
- Aus $u + x = u$ und $u + \underline{0} = u$ folgt: $x = \underline{0}$.
- Aus $u + x = 0$ folgt: $x = -u$.

2.5 Satz:

V sei ein Vektorraum. Es gilt:
– $0 \cdot v = \underline{0}$
– $r \cdot \underline{0} = \underline{0}$

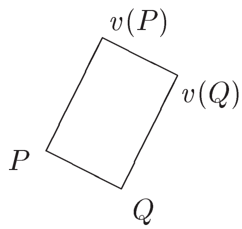
<u>Beweis:</u>
$0 \cdot v = (0 - 0) \cdot v = 0 \cdot v - 0 \cdot v = \underline{0}$.
$r \cdot \underline{0} = r \cdot (\underline{0} - \underline{0}) = r \cdot \underline{0} - r \cdot \underline{0} = \underline{0}$ □

Unterstreichung des Nullvektors wird ab jetzt weggelassen!

2.3 Geometrische Interpretation

Dieses Kapitel soll nur zur Veranschaulichung dienen und eine Verbindung zum Schulstoff (analytische Geometrie) herstellen. Es werden hier keine Beweise geführt.

Sei E eine Ebene. $v : E \to E$ sei eine Translation, d. h. eine Abbildung, die einen Punkt in der Ebene in einer bestimmten Richtung um eine bestimmte Strecke verschiebt.
Für alle Punkte $P, Q \in E$ gilt: $P, Q, v(P), v(Q)$ bilden ein Parallelogramm:



Eigenschaften:

– Die gerichteten Strecken $(P, v(P))$ sind für alle $P \in E$ gleich lang, gleich gerichtet.

– Sind P_0 und $v(P_0)$ bekannt, so läßt sich $v(Q)$ für alle $Q \in E$ bestimmen.

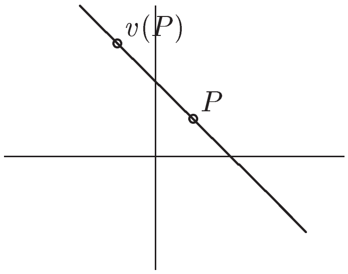
– Nimmt man zwei Punkte $P_0, P_0' \in E$, so existiert ein $v : E \to E$ mit $v(P_0) = P_0'$.

Man bezeichnet die Menge aller Translationen in der Ebene E mit $T(E)$.

Beh.: $T(E)$ ist ein Vektorraum bezüglich folgender Operationen:
Addition: $u, v \in T(E)$: $(u + v)(P) := u(v(P))$ Hintereinanderausführung.
Skalarmultiplikation: $(su)(P)$: gleiche Richtung, aber s-fache Strecke; falls $s < 0$ entgegengesetzte Richtung.

Bei fest gewähltem Koordinatensystem existiert ein eineindeutige (bijektive) Abbildung von E nach $\mathbb{R}^2$. (Für eine Ebene mit festem Koordinatensystem schreibt man oft E_c). Aufgrund dieser Abbildung läst sich die Menge $\mathbb{R}^2$ mit der Menge der Punkte in der Ebene E_c mit kartesischem Koordinatensystem identifizieren, d. h. der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ läßt sich mit dem Vektorraum $T(E)$ der Translationen der Ebene identifizieren.

Parameterdarstellung von Geraden



$Q \in g \quad \Leftrightarrow \quad Q = P + t \cdot v$
P heißt Bezugspunkt,
v heißt Richtungsvektor.

- Parallelitätskriterium:
  g und h sind parallel $\quad \Leftrightarrow \quad$ die beiden Richtungsvektoren sind skalare Vielfache voneinander.
- Berechnung von Schnittpunkten:
  $Q \in g \quad \Leftrightarrow \quad Q = P_1 + tv_1$
  $R \in h \quad \Leftrightarrow \quad R = P_2 + sv_2$
  $\Rightarrow \quad Q \in g \cap h \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, s, r \in \mathbb{R}: \quad P_1 + tv_1 = P_2 + sv_2.$
  Lösen eines 2×2-Gleichungssystems:
  $*$ keine Lösung $\Leftrightarrow$ Geraden sind parallel, verschieden
  $*$ genau eine Lösung $\Leftrightarrow$ nicht parallel
  $*$ unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow$ Geraden parallel, identisch.

Beispiel:

$g : x = \binom{0}{2} + t \cdot \binom{1}{1}$ und $h : x = \binom{4}{0} + s \cdot \binom{-1}{1}$. Für den Schnittpunkt muß gelten: $\binom{0}{2} + t \cdot \binom{1}{1} = \binom{4}{0} + s \cdot \binom{-1}{1}$. Mit Hilfe des Eliminationsverfahrens ergibt sich: $s = 3,\ t = 1$.

Eine Gerade läßt sich auch als Lösungsmenge von $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ darstellen. Ein Umrechnung ist auf folgende Arten möglich:
• Falls $a_1 \neq 0$: $(x_1, x_2) = (\frac{b}{a_1}, 0) + t(a_2, -a_1)$ oder, falls $a_2 \neq 0$: $(x_1, x_2) = (0, \frac{b}{a_2}) + t(a_2, -a_1)$.
• Sei $g : x = (r_1, r_2) + t(a_1, a_2)$. Als Gleichung: $a_2x_1 - a_1x_2 = a_2r_1 - a_1r_2$.

Kapitel 3

Endlichdimensionale Vektorräume

3.1 Unterverktorräume

Beispiele:

- L_H Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems:
  Es gilt: $c, d \in L_H \quad \Rightarrow \quad c + d \in L_H$,
  $r \in \mathbb{R},\ c \in L_H \quad \Rightarrow \quad rc \in L_H$.
- $P_k([a, b])$ Polynome vom Grad k.
  Es gilt: $p, q \in P_k([a, b]) \quad \Rightarrow \quad p + q \in P_k([a, b])$.
  $r \in \mathbb{R},\ p \in P_k([a, b]) \quad \Rightarrow \quad rp \in P_k([a, b])$.

3.1 Definition: Untervektor-raum

K sei ein Körper, V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Teilmenge $U \subseteq V$ ***Unterverktorraum*** *von V, wenn gilt:*

a) $0 \in U$

b) $\forall u, v \in U \quad \Rightarrow \quad u + v \in U$

c) $\forall u \in U\ \forall r \in K \quad \Rightarrow \quad ru \in U$

Eigenschaften:

- Untervektorräume sind nichtleer.
- Sei U eine Teilmenge von V, $U \neq \emptyset$. U besitze die Eigenschaften b) und c). Dann gilt: U ist ein Untervektorraum.
  Beweis: $\exists u_0 \in U \quad \Rightarrow \quad -u_0 \in U$, da $-u_0 = (-1) \cdot u_0$ und Eigenschaft c). $\Rightarrow \quad u_0 + (-u_0) = 0 \in U$.
- U ist ein Untervektorraum $\quad \Rightarrow \quad U$ ist ein K-Vektorraum.

Beweis: Überprüfung der Axiome V1-V7:
V1, V2, V5, V6 und V7 gelten, da $U \subseteq V$ und V ein Vektorraum ist.
V3: Existenz des Nullvektors: Punkt a) der Definition.
V4: Existenz des Negativen: $-u = (-1) \cdot u$ Punkt c) der Definition.

Beispiele:

1. Polynome: $P_k([a,b])$ ist ein Untervektorraum von $P_n([a,b])$, falls $k \leq n$.

   Beweis:

   $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ und $q = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$.

   $$p + q = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) x^i \in P_k([a,b]) \qquad rp = \sum_{i=0}^{k} r a_i b^i \in P_k([a,b])$$

2. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

   Beweis:

   $U = L_H$ der Gleichung $x - y = 0$.

3. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ ist **kein** Untervektorraum.

   Beweis:

   $(1,1) \in U$ und $(-1,1) \in U$, aber $(1,1) + (-1,1) = (2,0) \notin U$.

4. $U_1 = \{0\}$ ist der kleinste Untervektorraum von V.

5. $U_2 = V$ ist der größte Untervektorraum von V.
   U_1 und U_2 sind die trivialen Untervektorräume.

6. Sei $v \in V$. Es wird definiert:
   $L(v) := \{rv \mid r \in K,\ v \in V\}$. $L(v)$ ist ein Untervektorraum.

   Beweis:

   Seien $u, w \in L(v)$. Dann gilt: $\exists r, s \in K : u = rv,\ w = sv$.
   a) $L(v) \neq \emptyset$. b) $u + w = (r+s)v \in L(v)$. c) $tu = (ts)v \in L(v)$.

3.2 Definition:
Sei V ein K-Vektorraum und $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $v_i \in V$ für $i = 1 \ldots m$ ein System von Vektoren. ***Der von S erzeugte Unterverktorraum*** *$L(S)$ ist die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren in S, d. h.*

$$L(S) := L(v_1, \ldots, v_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i v_i \mid r_i \in K \right\}$$

Man nennt $L(S)$ auch die ***lineare Hülle*** *der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$.*

3.3 Satz:
$L(v_1, \ldots, v_m)$ ist der kleinste Untervektorraum, der $v_1, \ldots, v_m$ enthält.

Beweis:

- $L(v_1, \ldots, v_m)$ ist ein Untervektorraum.

a) $0 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_m \in L(v_1, \ldots, v_m)$.

b) Sei $u = \sum r_i v_i$ und $v = \sum s_i v_i$.
$u + v = \sum (r_i + s_i) v_i \in L(v_1, \ldots, v_m)$.

c) $t \cdot u = \sum t r_i v_i \in L(v_1, \ldots, v_m)$.

- Z. z.: $L(v_1, \ldots, v_m)$ ist der kleinste Untervektorraum, der $v_1, \ldots, v_m$ enthält, d. h. falls U ein Untervektorraum ist, der $v_1, \ldots, v_m$ enthält, gilt: $L(v_1, \ldots, v_m) \subseteq U$.

Sei also U ein bel. Untervektorraum, der $v_1, \ldots, v_m$ enhält.
Da U ein Untervektorraum ist, muß gelten:
$v_i \in U \quad \Rightarrow \quad r_i v_i \in U \quad \Rightarrow \quad \sum r_i v_i \in U$. □

Einige Spezialfälle:

$v_1 = v_2 = 0$	$L(v_1, v_2) = \{0\}$	
$v_1 = 0,\ v_2 \neq 0$	$L(v_1, v_2) = L(v_2)$	Gerade durch $(0,0)$ mit Richtung v_2
$v_1 \neq 0,\ v_2 = 0$	$L(v_1, v_2) = L(v_1)$	Gerade in Richtung v_2
$v_1 = t v_2$	$L(v_1, v_2) = L(v_1) = L(v_2)$	Gerade in Richtung v_1 oder v_2
$v_1 \neq t v_2$	$L(v_1, v_2)$	durch v_1 und v_2 aufgespanne Ebene.

3.2 Basen von Vektorräumen

Sei V ein K-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Gesucht ist ein System $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$, so daß gilt:

$$\forall u \in U \ \exists! \text{ Darstellung } u = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i$$

Beispiel:

L_H sei die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems, Buchführungsmenge $D = \{j_1, \ldots, j_r\}$, $d(j)$ sei eine Basislösung für $j \notin D$. Nach Satz 2.15 gilt: $\forall c \in L_H \ \exists!$Darstellung $c = \sum_{j \notin D} t_j d(j)$.

3.4 Definition:

*V sei ein K-Vektorraum. Ein System $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $v_i \in V$ heißt **linear unabhängig**, wenn jedes Element $v \in L(v_1, \ldots, v_m)$ nur eine Darstellung hat:* linear unabhängig

$$v = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i \tag{3.5}$$

*Anderenfalls, wenn das System nicht linear unabhängig ist, heißt es **linear abhängig**.* linear abhängig

Beispiele:

1. L_H: Die Basislösungen $d(j)$ sind linear unabhängig.
2. $P_n([a, b])$ Polynome vom Grad n:
   $S = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ ist lin. unabhängig. $P_n([a, b]) = L(S)$.
3. Linear unabhängiges System in K^n:
   $e_i := (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, wobei die 1 an der i-ten Stelle steht.
   $S = \{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ heißt **Standardbasis** von K^n.
   S ist linear unabhängig: $v = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i e_i = (r_1, \ldots, r_n)$. Die Darstellung von v ist eindeutig, da v eindeutig bestimmte Einträge besitzt.

3.6 Satz:

Ein System $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn es eine nicht-triviale Darstellung der Null gibt, d. h.

$$0 = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i \qquad \exists\, i : \quad r_i \neq 0$$

<u>Beweis:</u>

“$\Rightarrow$” Sei S linear abhängig, d. h. $\exists\, v \in L(v_1, \ldots, v_n)$, so daß gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \qquad \exists\, i : \ r_i \neq s_i$$

Daraus folgt: $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} (r_i - s_i) v_i \qquad \exists\, i : \ r_i - s_i \neq 0.$

“$\Leftarrow$” Existiere eine nicht-triviale Darstellung der Null:
$0 = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i v_i \qquad \exists\, i : \ r_i \neq 0.$

Es existiert aber auch eine triviale Darstellung: $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i$, d. h. die Darstellung ist nicht eindeutig, d. h. System linear abhängig. □

3.7 Folgerung:

Ein System $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn

$$0 = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i \quad \Rightarrow \quad \forall\, j : \quad r_j = 0$$

<u>Beweis:</u>

Die Folgerung ergibt sich aus Satz 3.6 aufgrund folgender Äquivalenz:

$$A \;\Rightarrow\; B \quad \cong \quad \neg A \vee B$$

Beispiele:

• $S = \{v_1\}$. S ist linear unabhängig $\quad \Leftrightarrow \quad v_1 \neq 0$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Annahme: $v_1 = 0$. Daraus folgt: $0 = 1 \cdot v_1$, d. h. das System ist linear abhängig.

"$\Leftarrow$" $v_1 \neq 0$ Daraus folgt: $0 = r \cdot v_1 \quad \Rightarrow \quad r = 0$, d. h. das System ist linear unabhängig.

• $S = \{v_1, v_2\}$. S ist lin. unabh. $\quad \Leftrightarrow \quad v_1 \neq 0 \wedge v_1 \neq tv_2$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Annahme: $v_1 = 0 \vee v_1 = tv_2$

i) $0 = 1 \cdot v_1 + v_2 \quad \Rightarrow$ lin. abhängig.

ii) $0 = v_2 - tv_1 \quad \Rightarrow$ lin. abhängig.

"$\Leftarrow$" Sei S lin unabhängig. Annahme: $0 = r_1 v_1 + r_2 v_2$.

i) $r_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = r_1 v_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0$, d. h. lin. unabhängig.

ii) $r_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{r_1}{r_2} v_1$ Widerspruch.

Konvention: $L(\emptyset) = \{0\}$.

3.8 Satz:

Ein System $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn für $k = 1 \dots n$ gilt:

$$v_k \notin L(v_1, \dots, v_{k-1})$$

<u>Beweis:</u>

"$\Rightarrow$" Beweis durch Widerspruch: Sei S linear unabhängig.

Angenommen, es existiere ein $k \geq 1 :\; v_k \in L(v_1, \dots, v_{k-1})$, d. h.

$v_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i v_i$. Dann existiert aber eine nicht-triviale Darstellung der Null:

$0 = \sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i v_i - 1 \cdot v_k + \sum\limits_{i=k+1}^{n} 0 v_i$.

Dies bedeutet: S ist lin. abhängig. Widerspruch.

"$\Leftarrow$" Beweis durch Widerspruch: Gelte: $v_k \notin L(v_1, \dots, v_{k-1})$.

Angenommen: S wäre linear abhängig, d. h. in der Darstellung $0 = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ existiert ein Index j, so daß $r_j \neq 0$ ist.
Sei k der größte Index mit $r_k \neq 0$, d. h. $0 = r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k$.
Daraus folgt: $v_k = -\frac{1}{r_k}(r_1 v_1 + \cdots + r_{k-1} v_{k-1}) \in L(v_1, \dots, v_{k-1})$.
Widerspruch!

$\square$

3.9 Definition:

V sei ein Vektorraum über K und sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein System von Vektoren in V.

- *S heißt **erzeugendes System** von V genau dann, wenn $L(S) = V$.*
- *S heißt **Basis** von V, wenn jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung*

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$$

besitzt.

- S ist eine Basis genau dann, wenn S linear unabhängig und erzeugend ist.
- Sei $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis, d. h. zu jedem $v \in V$ existiert genau eine Darstellung als Linearkombination:

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$$

  r_i wird als i-te **S-Koordinate** von v bezeichnet.

- Die Abbildung $k_v : V \to K^m : v \mapsto (r_1, r_2, \dots, r_m)$ ist bijektiv und heißt **Koordinatenfunktion**.

- V sei ein K-Vektorraum mit Basis $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. Dann ist mit Hilfe der Koordinatenfunktion V mit K^m identifizierbar.

Beispiele:

a) Sei L_H die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems. Zu jedem $j \notin D$ sei $d(j)$ die zugehörige Basislösung. Nach Satz 1.25 bilden diese Basislösungen eine Basis von L_H.

b) $P_n([0,2])$ sei die Menge der Polynome mit Grad n über dem Intervall $[0,2]$. Die Menge $S = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ ist eine Basis von $P_n([0,2])$.

Beweis:

1. System ist erzeugend:
   Dies ist klar, da jedes Polynom die Form $p(x) = \sum_{i=0}^{n} r_i x^i$ hat.
2. System ist linear unabhängig:
   Es ist zu zeigen: $\forall k = 0 \dots n : x^k \notin L(1, \dots, v^{k-1})$.
   Beweis durch vollständige Induktion:
   Induktionsanfang: Sei $k = 0$, d. h. $x^k = x^0 = 1$.
   Da $1 \neq 0$ ist, gilt: $1 \notin L(\emptyset) = \{0\}$.
   Induktionsannahme: $x^k \notin L(1, x, \dots, x^{k-1})$.
   Induktionsbehauptung: $x^{k+1} \notin L(1, x, \dots, x^k)$
   Beweis durch Widerspruch: Angenommen $x^{k+1} \in L(1, x, \dots, x^k)$
   $\Rightarrow \quad x^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} r_i x^i$.
   Es gibt dann zwei Fälle zu unterscheiden:
   • $r_0 \neq 0$. Wähle $x = 0$. Dann folgt daraus: $0 = r_0 + 0 + 0 \cdots + 0$, d. h. $r_0 = 0$ Widerspruch!
   • $r_0 = 0$, d. h. $x^{k+1} = x \cdot \sum_{i=1}^{k} r_i x^{i-1}$. Daraus folgt $x^k = \sum_{i=0}^{k-1} r_i x^i \quad \Rightarrow$ $x^k \in L(1, x, \dots, x^{k-1})$. Widerspruch. □

c) Gegeben sei die Menge $P_2([0,2])$ aller quadratischen Polynome über dem Intervall $[0,2]$. Die Menge $S = \{x(x-1),\ x(x-2),\ (x-1)(x-2)\}$ bildet eine Basis von $P_2([0,2])$. (Diese Polynome werden auch als "nichtnormierte Lagrange Interpolationspolynome" bezeichnet).

Beweis:

1. S ist linear unabhängig. Sei $S = \{e_1, e_2, e_3\}$
   Es ist zu zeigen:
   $$0 = \sum_{i=1}^{3} r_i e_i \quad \Rightarrow r_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$$
   • Sei $x = 0$. Dann gilt: $e_1(0) = 0,\ e_2(0) = 0,\ e_3(0) = 2$.
   $0 = r_1 \cdot 0 + r_2 \cdot 0 + r_3 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad r_3 = 0$.
   • Sei $x = 1$. Dann gilt: $e_1(1) = 0,\ e_2(1) = -1,\ e_3(1) = 0$.
   $0 = r_1 \cdot 0 + r_2 \cdot (-1) + r_3 \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = 0$.
   • Sei $x = 2$. Dann gilt: $e_1(2) = 2,\ e_2(2) = 0,\ e_3(2) = 0$.
   $0 = r_1 \cdot 2 + r_2 \cdot 0 + r_3 \cdot 0 \quad \Rightarrow r_1 = 0$.
   $\Rightarrow \quad r_1 = r_2 = r_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ lineare Unabhängigkeit.
2. S ist erzeugend, d. h.
   $$p(x) = ax^2 + bx + c = \sum_{i=1}^{3} r_i e_i \qquad (\star)$$

$$\begin{array}{lcl} x=0 & \Rightarrow & p(x)=c=2\cdot r_3 \\ x=1 & \Rightarrow & p(x)=a+b+c=-r_2 \\ x=2 & \Rightarrow & p(x)=4a+2b+c=2\cdot r_1. \end{array}$$

Falls $(\star)$ gilt, muß also gelten:

$$r_1 = 2a+b+\tfrac{c}{2}$$
$$r_2 = -a-b-c$$
$$r_3 = \tfrac{c}{2}$$

Einsetzen in $(\star)$ liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} r_i e_i = \quad & (2a+b+\tfrac{c}{2})(x^2-x)+(-a-b-c)(x^2-2x) \\ & + \tfrac{c}{2}(x^2-3x+2) \\ = \quad & x^2((2a+b+\tfrac{c}{2})(-a-b-c)+\tfrac{c}{2}) \\ & + x(-2a-b-\tfrac{c}{2}+2a+2b+2c-\tfrac{3}{2}c)+c \\ = \quad & ax^2+bx+c \end{aligned}$$

□

d) Gegeben sei der Raum K^n. Sei $e_i = (0,0,\ldots,1,0,\ldots)$ derjenige Vektor, bei dem der i-te Eintrag 1 und alle anderen Einträge 0 sind.
$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bildet eine Basis von K^n. Sie heißt **Standardbasis** von K^n.
Beweis:
1. lineare Unabhängigkeit: ist klar (s. o.).
2. erzeugendes System: $v = (v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$. □

3.10 Satz:

*Sei S ein linear unabhängiges System in V. Dann gilt: S ist genau dann eine Basis von V, wenn S ein **maximales linear unabhängiges System** ist.*
Maximal heißt: Vergrößert man S um einen beliebigen Vektor aus V, so ist S linear abhängig.

Beweis:

S ist Basis $\Leftrightarrow$ S lin. unabhängig und erzeugend. Die Aussage des Satzes ist äquivalent zu folgender Behauptung: S ist kein erzeugendes System genau dann, wenn S nicht maximal ist. Dies wird hier bewiesen:

"$\Rightarrow$" Sei S kein erzeugendes System,
d. h. es existiert ein $v \in V$, so daß gilt: $v \notin L(S)$.
Sei $S' = S \cup \{v\} = \{v, v_1, \ldots, v_n\}$. Nach Satz 3.8 ist dieses System S' linear unabhängig. Also ist S nicht maximal.

"$\Leftarrow$" Sei S nicht maximal,

d. h. $\exists v \in V: \ S' := S \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.

Nach Satz 3.8 gilt dann: $v \notin L(S) = L(v_1, \ldots, v_n)$. Also ist S nicht erzeugend.

$\square$

3.11 Satz:

*Sei $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ein erzeugendes System. Dann ist S genau dann eine Basis, wenn S ein **minimales erzeugendes System** ist.*

Minimal heißt: Verkleinert man S um irgendeinen Vektor, so ist das neue System nicht mehr erzeugend.

Beweis:

Die Aussage des Satzes ist äquivalent zu folgender: S ist lin. abhängig genau dann, wenn S nicht miminal ist.

"$\Rightarrow$" Sei S linear abhängig.

Nach Satz 3.8 gilt dann: $\exists\, k: \ v_k \in L(v_1, \ldots, v_{k-1})$.

$\Rightarrow \ L(S) = L(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_m) = V$.

Das heißt, S ist nicht minimal.

"$\Leftarrow$" Sei S nicht minimal,

d. h. $\exists\, v_k \in S$, den man weglassen kann.

$S' = S \setminus \{v_k\}$ ist erzeugend.

Man kann v_k also darstellen: $v_k = \sum\limits_{i \neq k} r_i v_i$.

$\Rightarrow \ 0 = \sum\limits_{i<k} r_i v_i - 1 \cdot v_k + \sum\limits_{i>k} r_i v_i$. Also ist S linear abhängig.

$\square$

Beispiel:

$S = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 = (1, 0, 2), \ v_2 = (2, 4, 2), \ v_3 = (0, -2, 1)$. Sei $V = L(S)$.

- Wie man leicht sieht, ist $v_2 = 2 \cdot v_1 - 2 \cdot v_3$,
  d. h. $V = L(S) = L(v_1, v_3)$,wobei v_1 und v_3 linear unabhängig sind, also eine Basis von V bilden.

- Andererseits ist aber $v_1 = \frac{1}{2} v_2 + v_3$,
  d. h. $V = L(S) = L(v_2, v_3)$, wobei v_2 und v_3 linear unabhängig sind, also eine Basis von V bilden.

Sei $S \subseteq K^n$ ein System von Vektoren, $S = \{v_1, \dots, v_m\}$.
$v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ als Zeilenvektor.
Untereinandergeschrieben bilden die Vektoren die Zeilen folgender Matrix:

$$A_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

Bezeichnungen:

Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix. Der von den Zeilen $A^i := (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ erzeugte Untervektorraum heißt **Zeilenraum $\boldsymbol{U_Z(A)}$**.

$$U_Z(A) := \Big\{ c \in K^n \;\Big|\; c = \sum_{i=1}^{m} r_i A^i \Big\}.$$

Der von den Spalten $A_j := (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ erzeugte Untervektorraum heißt **Spaltenraum $\boldsymbol{U_S(A)}$**.

$$U_S(A) := \Big\{ d \in K^m \;\Big|\; d = \sum_{i=1}^{n} r_i A_i \Big\}.$$

3.12 Satz:

a) *Geht eine Matrix aus einer anderen durch elementare Zeilenumformungen hervor, so stimmen die Zeilenräume überein.*

a) *Ist eine Matrix in Stufenform, so bilden die von Null verschiedenen Zeilen eine Basis des Zeilenraums.*

<u>Beweis:</u>

a) Gehe B aus A durch elementare Umformungen hervor. Wir zeigen die folgende Inklusion: $U_Z(B) \subseteq U_Z(A)$. Die andere Inklusion folgt aus der Tatsache, daß Elementarumformungen durch Elementarumformungen rückgängig gemacht werden können, d. h. daß A auch aus B hervorgeht.
   i) Sei v_i die i-te Zeile von A. Skalarmultiplikation von v_i mit $t \in K$ liefert die i-te Zeile w_i von B: $w_i = t \cdot v_i$; alle Zeilen mit einem Index $j \neq i$ sind unverändert.
   $\Rightarrow\ U_Z(B) \subseteq U_Z(A)$.
   ii) Sei $w_j = v_j + t \cdot v_i$, $i \neq j$.
   $\Rightarrow\ w_j \in U_Z(A)$. Da alle Zeilen von B mit einem Index $k \neq j$ unverändert sind, ist $U_Z(B) \subseteq U_Z(A)$.
   iii) Vertauschen von zwei Zeilen hat offensichtlich keinen Einfluß auf den erzeugten Raum.
   $\Rightarrow U_Z(A) = U_Z(B)$

b) Sei A in Stufenform, die Buchführungsmenge sei $D = \{j_1, \dots, j_r\}$, seien $v_1, \dots, v_r$ die von Null verschiedenen Zeilen.
• Daß diese Zeilen ein erzeugendes System bilden, ist klar.
• Lineare Unabhängigkeit:
Betrachten wir die j_k-ten Komponenten der Zeilen, wobei $k = 1 \dots r$ ist: $a_{kj_k} = 1,\ a_{lj_k} = 0$ für $l \neq k$, d. h. v_k kann keine Linearkombination der anderen v_i sein.
$\Rightarrow v_k \notin L(v_1, \dots, v_{k-1})$.
Also ist das System lin. unabhängig.

$\square$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S = \big\{(1,0,2), (0,1,-\frac{1}{2})\big\}$ ist eine Basis von $U_Z(A)$.

3.3 Dimension von Vektorräumen

Unser Ziel ist zu beweisen, daß je zwei Basen aus gleich vielen Elementen bestehen.

3.13 Satz: (Basisergänzungssatz)
V sei ein Vektorraum über K. Sei $E = \{w_1, \dots, w_m\}$ ein erzeugendes System. Jedes linear unabhängige System $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ in V läßt sich durch geeignete $w_j \in E$ zu einer Basis ergänzen.

Beweis:
Falls S erzeugend ist, sind wir bereits fertig, d. h. S ist eine Basis.
Sei S also nicht erzeugend. Sei j_1 der kleinste Index mit $w_{j_1} \notin L(S)$, d. h. $w_j \in L(S)$ für $j < j_1$.
Setze $S_1 := S \cup \{w_{j_1}\} = \{v_1, \dots, v_k, w_{j_1}\}$. S_1 ist linear unabhängig.
Entweder ist S_1 erzeugend. Dann sind wir fertig. Sonst wird das Verfahren wiederholt. Es bricht nach maximal m Schritten ab, und wir erhalten:

$$S_r = \{v_1, \dots, v_m, w_{j_1}, \dots, w_{j_r}\}$$

$\forall j: \ w_j \in L(S_r) \quad \Rightarrow \quad V = L(E) = L(S_r)$. $\square$

Gegenbeispiel:

$\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist ein Vektorraum. $P_k(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum für alle $k \in \mathbb{N}$.
$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$ ist eine Basis von $P_k(\mathbb{R})$. Da k beliebig groß sein kann, kann es keine *endliche* Basis von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ geben.

3.14 Lemma:

Sei V ein Vektorraum. Ist $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ein linear unabhängiges System und $E = \{w_1, \ldots, w_m\}$ ein erzeugendes System, so gilt: $k \leq m$.

Beweis:

1. Falls $k = 0$ ist, gilt die Behauptung $0 \leq m$.
2. Sonst ist $k \geq 1$:
   Betrachte das System $S' = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Dieses ist nicht erzeugend, da $v_k \notin L(S')$.
   $\Rightarrow\ \exists\, w_{j_1} \in E$, so daß $w_{j_1} \notin L(S')$.
   $\Rightarrow\ T_1 := \{v_1, \ldots, v_{k-1}, w_{j_1}\}$ ist linear unabhängig.
   Man fahre analog fort:
   $T_1' := \{v_1, \ldots, v_{k-2}, w_{j_1}\}$ ist nicht erzeugend.
   $\Rightarrow\ \exists\, w_{j_2} \in E$, so daß $w_{j_2} \notin L(T_1')$.
   $\Rightarrow\ T_2 := \{v_1, \ldots, v_{k-2}, w_{j_1}, w_{j_2}\}$ ist linear unabhängig, insbesondere ist $w_{j_1} \neq w_{j_2}$.
   Wiederhole das Verfahren insgesamt k Mal.
   $T_k = \{w_{j_1}, \ldots, w_{j_k}\}$ ist linear unabhängig und es gilt $w_{j_i} \neq w_{j_k}$, falls $i \neq k$.
   Das heißt: In E gibt es k verschiedene Vektoren. $\Rightarrow\ k \leq m$

$\square$

3.14 Satz:

Sind $F = \{v_1, \ldots, v_r\}$ und $G = \{w_1, \ldots, w_s\}$ Basen eines Vektorraumes V, so gilt: $r = s$.

Beweis:

Aus Lemma 3.14 folgt direkt:
F ist lin. unabhängig, G ist erzeugend $\Rightarrow\ r \leq s$
G ist lin. unabhängig, F ist erzeugend $\Rightarrow\ s \leq r$

3.15 Definition:

Dimension

V sei ein K-Vektorraum. Falls die Anzahl der Elemente einer Basis endlich ist, heißt diese Anzahl ***Dimension*** *von V, geschrieben $\dim V$.*
Anders gesagt:

$$\dim V = n \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, v_1, \ldots, v_n \in V : \forall\, v \in V\ \exists!\, v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$$

Beispiele:

1. $\dim K^n = n$

2. $\dim P_k(M) = k+1$ und $S = \{1, x, \ldots, x^k\}$ ist eine Basis.

3. Sei $A \in K^{m \times n}$.
   $U_Z(A) \subseteq K^n$ ist der Zeilenraum.
   $L_H(A) \subseteq K^n$ ist die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems.
   Bringt man die Matrix A mit Hilfe des Eliminationsverfahrens in Stufenform, so erhält man die Buchführungsmenge $D = \{j_1, \ldots, j_r\}$.
   Aus Satz 3.12 folgt: $\dim U_Z(A) = r$
   Aus Satz 1.25 folgt: $\dim L_H(A) = n - r$.

Zusammenfassung:

Sei V ein Vektorraum, $\dim V = n$.

1. Jede Basis von V besteht aus n Vektoren.

2. Jedes erzeugende System hat mindestens n Elemente.
   $E = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ist Basis genau dann, wenn $m = n$ ist.

3. Jedes linear unabhängige System hat höchstens n Elemente.
   $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ist Basis genau dann, wenn $k = n$ ist.

3.16 Satz:
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Jeder Unterverktorraum $U \subseteq V$ ist auch endlich erzeugt, und es gilt: $\dim U \leq \dim V$, *wobei gilt:*

$$\dim U = \dim V \quad \Leftrightarrow \quad U = V$$

Beweis:

1. V besitzt eine endliche Basis. $\Rightarrow$ U besitzt ein maximales linear unabhängiges System, d. h. U besitzt eine Basis, da $U \subseteq V$ ist, muß gelten: $\dim U \leq \dim V$.

2. "$\Leftarrow$" klar.
   "$\Rightarrow$" Sei $F = \{v_1, \ldots, v_m\}$ mit $m = \dim U = \dim V$ eine Basis von U.
   F ist linear unabhängig und enthält die maximale Anzahl von linear unabhängigen Elementen in V, d. h. F ist eine Baisis von V (Satz 3.10).

□

Beispiele:

1. Sei $V = \{0\}$. Dann ist $\dim V = 0$.

2. Polynome $P_n(M)$ und $P_k(M)$. Falls $k \leq n$ ist, ist $P_k(M)$ ein Untervektorraum von $P_n(M)$. Für die Dimensionen gilt: $\dim P_n(M) = n+1$ und $\dim P_k(M) = k+1$.

3. $V = K$. Folgende Untervektorräume sind möglich: $U_1 = \{0\}$ ($\dim U_1 = 0$) und $U_2 = K$ ($\dim U_2 = 1$).

4. $V = K^2$. Folgende Untervektorräume sind möglich: $U_1 = \{0\}$, $U_2 = K^2$ und $U_3 =$ Geraden durch den Ursprung ($\dim U_3 = 1$).

5. Seien $U,\ W \subseteq V$ Untervektorräume. Dann ist $U \cap W$ *der größte Untervektorraum*, der in U und W enthalten ist.

6. *Kleinster Untervektorraum*, der U und W enthält:
   Ein möglicher Kandidat wäre $U \cup W$. Aber es stellt sich heraus, daß $U \cup W$ kein Untervektorraum ist. Gegenbeispiel:
   Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ und $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$.
   $(1,1) \in U$ und $(1,-1) \in W$, aber $(0,2) \notin U \cup W$.

3.17 Satz:
Seien $U,\ W$ Untervektorräume von V. Dann ist

$$U + W := \left\{ v \in V \;\middle|\; v = u + w,\ u \in U,\ w \in W \right\}$$

der kleinste Untervektorraum, der U und W enthält.
Bezeichnung: $U + W$ heißt ***Summe*** *von U und W.*

Beweis:

1. $U + W$ ist ein Untervektorraum:
   • Da U und W Untervektorräume sind, gilt: $0 \in U$ und $0 \in W$.
   $\Rightarrow \quad 0 \in U + W$.
   • Sei $v_1 = u_1 + w_1$ und $v_2 = u_2 + w_2$.
   $v_1 + v_2 = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in U + W$.
   • Sei $v = u + w$. Dann ist $sv = su + sw \in U + W$.

2. $U + W$ ist der kleinste Untervektorraum, der U und W enthält.
   Sei X ein Untervektorraum, so daß $U \subseteq X$ und $W \subseteq X$.
   Dann gilt für alle $u \in U$ und alle $w \in W$: $u, w \in X$. Da X ein Untervektorraum ist, gilt $u + w \in X$, d. h. $U + W \subseteq X$.

$\square$

3.18 Satz: (Dimensionsformel)
Sei die Dimension eines Vektorraumes V endlich, d. h. $\dim V < \infty$. Für Untervektorräume U, W von V gilt:

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

Beweis:
Sei $F = \{v_1, \dots, v_d\}$ eine Basis von $U \cap W$.
Ergänze F zu einer Basis von U: $G_1 = \{v_1, \dots, v_d, u_1, \dots, u_r\}$.
Ergänze F zu einer Basis von W: $G_2 = \{v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_s\}$.
Bezüglich der Dimensionen gilt: $\dim F = d$, $\dim G_1 = d + r$, $\dim G_2 = d + s$.
Setze $H := \{v_1, \dots, v_d, u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$. Falls H eine Basis von $U + W$ ist, dann gilt für die Dimension:

$$\dim H = r + s + d = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Es bleibt also noch zu zeigen, daß H eine Basis von $U + W$ ist.

1. H ist erzeugend.
   Sei $v \in U + W$, d. h. $\exists u \in U \, \exists w \in W : \; v = u + w$.

$$\Rightarrow \quad u = \sum_{i=1}^{d} r_i v_i + \sum_{i=1}^{r} s_i u_i \quad \text{und} \quad w = \sum_{i=1}^{d} a_i v_i + \sum_{i=1}^{s} b_i w_i$$

$$v = \sum_{i=1}^{d} (a_i + r_i) v_i + \sum_{i=1}^{r} s_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i w_i \in L(H).$$

2. H ist linear unabhängig.
   $0 \in L(H)$, d. h. $0 = \sum_{i=1}^{d} t_i v_i + \sum_{i=1}^{r} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i w_i \qquad (\star).$

$$\Rightarrow \quad w := \underbrace{-\sum_{i=1}^{s} b_i w_i}_{\in W} = \underbrace{\sum_{i=1}^{d} t_i v_i + \sum_{i=1}^{r} a_i u_i}_{\in U}.$$

$$\Rightarrow \quad w \in U \cap W \quad \Rightarrow \quad w = \sum_{i=1}^{d} s_i v_i.$$

   $0 = w - w = \sum_{i=1}^{d} s_i v_i + \sum_{i=1}^{s} b_i w_i.$
   Da die v_i und w_i zusammen eine Basis von W bilden, gilt für alle b_i und s_i: $s_i = 0$ und $r_i = 0$.
   Setzt man die b_i in $(\star)$ ein so erhält man:
   $0 = \sum_{i=1}^{d} t_i v_i + \sum_{i=1}^{r} a_i u_i.$
   Da die v_i und die u_i zusammen eine Basis von U bilden, gilt: $t_i = a_i = 0$ für alle i.
   $\Rightarrow \quad H$ ist linear unabhängig.

□

3.19 Definition: Direkte Summe

*Seien U, W Untervektorräume von V. Die Summe $U+W$ heißt **direkt**, wenn jedes Element $v \in U+W$ genau eine Darstellung $v = u + w,\ u \in U,\ w \in W$ besitzt.*
Bezeichnung: $U \oplus W$.

3.20 Satz:
Die Summe zweier Untervektorräume U und W ist genau dann direkt, wenn gilt: $U \cap W = \{0\}$.

Beweis:
"$\Rightarrow$" Sei die Summe direkt, sei $v_0 \in U \cap W$.
Dann ist $v_0 = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{v_0}_{\in W} = \underbrace{v_0}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W}$. Da die Summe direkt ist und die Darstellung somit eindeutig, muß $v_0 = 0$ sein.

"$\Leftarrow$" Sei $U \cap W = \{0\}$, sei $v \in U + W$.
$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$
$\Rightarrow \quad \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W = \{0\}$.
$\Rightarrow \quad u_1 = u_2 \quad w_1 = w_2$, d. h. die Summe ist direkt.

$\square$

3.21 Satz:
Sei $\dim V < \infty$; seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Summe $U + W$ ist direkt*
2. $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$
3. $U \cap W = \{0\}$

Beweis:
$1 \Rightarrow 2$: Sei die Summe direkt. Nach Satz 3.20 gilt: $U \cap W = \{0\}$.
$\Rightarrow \ \dim(U \cap W) = 0 \quad \Rightarrow \ \dim(U+W) = \dim U + \dim W$.

$2 \Rightarrow 3$: Aus der Voraussetzung und der Dimensionsformel folgt:
$\dim(U \cap W) = 0 \quad \Rightarrow \quad U \cap W = \{0\}$.

$3 \Rightarrow 1$: Folgt direkt aus Satz 3.20

$\square$

• Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Gesucht ist ein Untervektorraum W von V, so daß gilt: $U \oplus W = V$. W heißt dann **Supplement** von U.

3.22 Satz:
Sei $\dim V < \infty$. *Zu jedem Untervektorraum U existiert ein Supplement W, d. h.*

$$\exists\, W \subseteq V: \quad U \oplus W = V$$

<u>Beweis:</u>

Sei $F = \{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von U. Ergänze diese Basis von U zu einer Basis von V: $G = \{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ ist eine Basis von V. Setze $W = L(w_1, \ldots, w_s)$.

- Ist $U + W = V$?
  Es ist klar, daß $U + W \subseteq V$ ist.
  Sei $v \in V \quad \Rightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{r} r_i u_i + \sum_{i=1}^{s} s_i w_i$.
  $\Rightarrow \quad v \in U + W \quad \Rightarrow \quad V \subseteq U + W$
  $\Rightarrow \quad V = U + W$.
- Ist die Summe direkt, d. h. $V = U \oplus W$?
  Sei $v \in U \cap W \quad \Rightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{r} r_i u_i = \sum_{i=1}^{s} s_i w_i$.
  $0 = v - v = \sum_{i=1}^{r} r_i u_i - \sum_{i=1}^{s} s_i w_i$.
  Da G eine Basis von V ist, gilt: $r_i = s_i = 0 \;\forall i$. Also ist $v = 0$.

$\square$

Wichtig: Das Supplement ist nicht eindeutig!
Beispiel: Ebene in $\mathbb{R}^3$. Supplemente sind alle Geraden durch den Ursprung, die nicht in der Ebene liegen!

3.4 Affine Unterräume

Betrachte die Translationen in der Ebene, die bekanntlich mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden können (siehe Paragraph 2.3).
Sei $v \in \mathbb{R}^2,\ v = (v_1, v_2)$,
sei $t_v \in T(E) : t_v : P = (r_1, r_2) \mapsto P + v = (r_1 + v_1, r_2 + v_2)$.
Diese Konstruktion funktioniert allgemein für beliebige K-Vektorräume.

Sei V ein K-Vektorraum, sei $v \in V$.
$t_v : V \to V : p \mapsto p + v$
$t_{v+w} = t_v \circ t_w$
$t_0 = \mathrm{id}$
$t_{-v} =$ Umkehrabbildung von t_v:

3.23 Definition: Affiner Unterraum

*V sei ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt **Affiner Unterraum** von V, wenn es einen Punkt $p \in V$ und einen Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt, so daß*

$$A = \{v \in V \mid v = p + u,\ u \in U\} =: p + U.$$

*p heißt **Bezugspunkt**, U heißt **Richtungsraum**.*

Beispiele:

1. Sei $L \neq \emptyset$ die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems.
   Nach Satz 1.21 gilt: $L = c + L_H$, also ein affiner Unterraum.

2. Triviale Beispiele: $p + \{0\} = \{p\}$ und $V = p + V$.

3. "Geraden": $g = p_0 + L(v) = p_0 + t \cdot v$
   "Ebenen": $E = p_0 + L(v_1, v_2)$.

3.24 Satz:

Sei $A = p + U$ ein affiner Unterraum von V.

a) $\forall\, q \in A:\ A = q + U$

b) Für $v \in V$ gilt: $v \in U \quad \Leftrightarrow \quad t_v(A) \subseteq A$.

Beweis:

a) $q = p + u_0,\ u_0 \in U$
   Sei $x \in A \quad \Rightarrow \quad x = p + u = p + u_0 - u_0 + u = q + (u - u_0)$.
   Da $u - u_0 \in U$ ist, folgt: $A \subseteq q + U$.
   Sei $x \in q + U$, d. h. $x = q + u = p + u_0 + u \in p + U = A$.
   $\Rightarrow\ q + U \subseteq A$.

b) Sei $v \in U$, sei $p + u \in A$.
   $t_v(p + u) = p + u + v \in p + U = A$.
   $\Rightarrow\ t_v(A) \subseteq A$.
   Sei v derart, daß $t_v(A) \subseteq A$.
   $t_v(p) = p + v \in A = p + U$, d. h. $v \in U$.

$\square$

Dimension eines affinen Unterraums:

$$\dim A = \dim U, \text{ falls } A = p + U.$$

Spezialfälle:

–	$\dim A = 0$	einelementige Mengen
–	$\dim A = 1$	affine "Geraden"
–	$\dim A = \dim V - 1$	A heißt **affine Hyperebene**

Beachte:
$\dim V = 3$: Ist A affine Hyperebene, so ist A eine "Ebene"
$\dim V = 2$: Ist A affine Hyperebene, so ist A eine "Gerade" !

Beispiel:

Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n,\ a \neq 0,\ b \in K$.
Die Lösungsmenge der linearen Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ ist eine affine Hyperebene in K^n.
Beweis:
$a \neq 0$. Sei o. B. d. A. $a_1 \neq 0$.
$\Rightarrow\ c_0 = \left(\frac{b}{a_1}, 0, \dots, 0\right)$.
$L = c_0 + L_H$, d. h. L ist ein affiner Unterraum.
Die Buchführungsmenge D besteht aus einem Element, da $|D| \leq m = 1$ ist.
Es ist $a_1 \neq 0$, d. h. $D = \{1\}$. Es gilt: $\dim L_H = n - |D| = n - 1$.

Gegeben sei ein Gleichungssystem über K mit Koeffizientenmatrix $A \in K^{m\times n}$ und der rechten Seite $b \in K^m$.
Der Lösungsraum des homogenen Systems sei $L_H(A)$, der des inhomogenen $L(A, b)$. Dann gilt:

- $L_H(A)$ ist ein Untervektorraum von K^n.
- $L(A, b)$ ist leer oder, falls $L(A, b)$ nichtleer ist, dann ist $L(A, b) = c_0 + l_H(A)$.
  Sei L_i die Lösungsmenge der i-ten Gleichung, d. h.

  $$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

  Die Lösungsmenge des gesamten Systems ergibt sich dann als Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Zeilen, d. h.

  $$L(A, b) = \bigcap_{i=1}^{m} L_i.$$

  Falls A keine trivialen Zeilen (Nullzeilen) enthält, dann ist die Lösungsmenge $L(A, b)$ der Durchschnitt von affinen Hyperebenen.

3.25 Definition: Parallelität

$A = p + U$ und $B = q + W$ seien affine Unterräume. A und B heißen ***parallel****, falls $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ ist.*

3.26 Lemma:

A und B seien parallele affine Unterräume.

$$A \cap B \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B \ \vee \ B \subseteq A$$

Beweis:

Sei $p \in A \cap B,\ A = p + U,\ B = q + W$.
$A \subseteq B$, falls $U \subseteq W$.
$B \subseteq A$, falls $W \subseteq U$. □

3.27 Satz:

$A = p + U$ und $B = q + W$ seien affine Unterräume. Dann ist $A + B$ ein affiner Unterraum mit Richtungsraum $U + W$.
Gilt $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cap B$ ein affiner Unterraum mit Richtungsraum $U \cap W$.

Beweis:

1. $A + B$ ist ein affiner Unterraum mit Richtungsraum $U + W$:

$$\begin{aligned} A + B &= \{v \in V \mid v = a + b,\ a \in A,\ b \in B\} \\ &= \{v \in V \mid v = p + u + q + w,\ u \in U,\ w \in W\} \\ &= \{v \in V \mid v = p + q + u + w,\ u \in U,\ w \in W\} \\ &= p + q + (U + W) \end{aligned}$$

2. Durchschnitt von affinen Unterräumen:
   Sei $p_0 \in A \cap B$. Nach Lemma 3.24 gilt:
   $A = p_0 + U$ und $B = p_0 + W$.
   $\Rightarrow\ p_0 + (U \cap W) \subseteq A \cap B$
   Sei $x \in A \cap B \quad \Rightarrow\ x = p_0 + u = p_0 + w,\ u \in U, w \in W$.
   $x - x = p_0 + u - (p_0 + w) = u - w = 0$.
   $\Rightarrow\ u = w \in U \cap W$
   $\Rightarrow\ A \cap B \subseteq p_0 + (U \cap W)$.

□

Kapitel 4

Lineare Abbildungen und Matrizen

4.1 Lineare Abbildungen

4.1 Definition:

Lineare Abbildung

*V und W seien K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **K-linear**, wenn für alle $u, v \in V,\ r \in K$ gilt:*

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$f(ru) = r \cdot f(u) \tag{4.2}$$

Eigenschaften:

- Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:
  $f(-v) = f(-1 \cdot v) = -1 \cdot f(v) = -f(v)$
  $f(0) = f(0-0) = f(0) - f(0) = 0.$
- Lineare Abbildungen respektieren Linearkombinationen:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(v_i) \tag{4.3}$$

Beispiele:

1. $0 : V \to W : v \mapsto 0$
   $\mathrm{id} : V \to V : v \mapsto v$
   $f : V \to V : v \mapsto t \cdot v$, wobei $t \neq 0$ fest gewählt ist.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x - y$ ist linear:
   $$f((x,y)+(a,b)) = f(x+a, y+b) = x + a - (y+b)$$
   $$= x - y + a - b = f(x,y) + f(a,b)$$
   $$f(r \cdot (x,y)) = f(rx, ry) = rx - ry = r(x-y) = rf(x,y).$$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x \cdot y$ ist nicht linear.
   $f(-1,-1) = 1 \neq -1 = -1 \cdot 1 = -1 \cdot f(1,1) = f(-1,-1)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x - y + 1$ ist nicht linear.
   $f(0,0) = 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0$.

Wiederholung: Multiplikation Matrix - Spaltenvektor

Sei $A \in K^{m \times n}$, $c \in K^n \cong K^{n \times 1}$ Spaltenvektor.

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} =: (a_1, a_2, \ldots, a_m)^T$

$A \cdot c = \big((Ac)_1, (Ac)_2, \ldots, (Ac)_m\big)^T$ mit $(Ac)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} c_j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + \cdots + a_{1n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + a_{m3}c_3 + \cdots a_{mn}c_n \end{pmatrix}$$

4.4 Satz:
Für $A \in K^{m \times n}$ ist die Abbildung

$$f_A : K^n \to K^m : v \mapsto A \cdot v$$

linear.

<u>Beweis:</u>

- $(A \cdot (c+d))_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(c+d)_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_j + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = (Ac)_i + (Ad)_i.$
- $(A \cdot (rc))_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(rc)_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} r c_j = r \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = r(Ac)_i.$ $\square$

4.5 Satz:
V und W seien Vektorräume, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von V. Zu jedem System $G = \{w_1, \ldots, w_n\}$ von n Elementen aus W gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1 \ldots n$.

Beweis:

1. Eindeutigkeit:
   Seien f_1 und f_2 derartige Abbildungen. Dann gilt für alle $v \in V$:
   $$\begin{aligned} f_1(v) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f_1(v_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i = \sum_{i=1}^{n} r_i f_2(v_i) \\ &= f_2\left(\sum_{i=1}^{n} r_i v_i\right) = f_2(v). \end{aligned}$$
   $\Rightarrow\ f_1 = f_2$.

2. Existenz:
   Sei $v \in V$, d. h. $v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$. $\quad f(v) := \sum_{i=1}^{n} r_i w_i$.
   S ist Basis von $V \quad \Rightarrow \quad f$ ist eindeutig definiert.
   Zu zeigen: f ist linear.
   $f(v_i) = f\Big(\sum_{j \neq i} 0 \cdot v_j + 1 \cdot v_i\Big) = 1 \cdot w_i = w_i$.
   Sei $u = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$.
   $\Rightarrow \quad u + w = \sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) v_i$ und $ru = \sum_{i=1}^{n} (r s_i) v_i$.
   $f(u + w) = \sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i + \sum_{i=1}^{n} s_i w_i = f(u) + f(w)$.
   $f(ru) = \sum_{i=1}^{n} r s_i w_i = r \sum_{i=1}^{n} s_i w_i = r \cdot f(u)$.

$\square$

4.6 Folgerung:

Sei $f : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. Ist $A \in K^{m \times n}$ die Matrix, deren j-te Spalte das Bild des j-ten Vektors der Standardbasis $f(e_j)$ ist, so gilt für alle $x \in K^n$:
$$f(x) = A \cdot x$$

Beweis:

Wir wissen, daß $f_A : K^n \to K^m : x \mapsto Ax$ linear und $f_A(e_j) = Ae_j$ gleich der j-ten Spalte von A ist.
$\Rightarrow\ f_A(e_j) = f(e_j)$ nach Voraussetzung.
Nach Satz 4.5 gilt: $\forall x \in K^n :\ f(x) = f_A(x)$. $\square$

Spezialfälle:

1. $f : K \to K$, d. h. $m = n = 1$, also ist $A \in K^{1 \times 1}$.
   $f(x) = r_0 \cdot x$ mit $r_0 = f(1)$.

2. $f : K \to K^m$, d. h. $n = 1$, also ist $A \in K^{m \times 1}$.

A ist ein Spaltenvektor $A = (a_1, \ldots, a_m)^T$.

$$f : x \mapsto Ax : x \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} a_1 x \\ \vdots \\ a_m x \end{pmatrix}$$

3. $f : K^n \to K$, d. h. $m = 1$, also ist $A \in K^{1 \times n}$ ein Zeilenvektor.

$$f : x \mapsto Ax : (x_1, \ldots, x_n)^T \cdot (a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \text{ mit } a_i = f(e_i)$$

4. $f : K^2 \to K^2$, d. h. $m = n = 2$, also ist $A \in K^{2 \times 2}$.

$$f : x \mapsto Ax : (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } f(e_1) = (a, c)^T \text{ und } f(e_2) = (b, d)^T$$

$\mathrm{Abb}(M, V)$ ist die Menge aller Abbildungen $f : M \to V$, wobei M eine beliebige Menge und V ein Vektorraum ist. Insbesondere ist $\mathrm{Abb}(M, V)$ ein Vektorraum bezüglich folgender Verknüpfungen:

$$\left.\begin{array}{l} (f+g)(r) = f(r) + g(r) \\ (sf)(r) = s \cdot f(r) \end{array}\right\} \forall r \in M$$

Insbesondere sind die linearen Abbildungen ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$

4.7 Satz:
V und W seien Vektorräume. Die Menge $\mathcal{L}(V, W)$ der linearen Abbildungen $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$.

Beweis:
Die Abbildung $0 : V \to W : v \mapsto 0$ ist linear, d. h. $\mathcal{L}(V, W) \neq \emptyset$.
Seien $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$, $r, s \in K$. Dann gilt:
$(f + g)(v_1 + v_2) = f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) =$
$\quad f(v_1) + g(v_1) + f(v_2) + g(v_2) = (f + g)(v_1) + (f + g)(v_2)$.
$(f + g)(sv_1) = f(sv_1) + g(sv_1) = s(f(v_1) + g(v_1)) = s(f + g)(v_1)$
$(sf)(v_1 + v_2) = sf(v_1 + v_2) = s(f(v_1) + f(v_2)) = (sf)(v_1) + (sf)(v_2)$.
$(rf)(sv_1) = rf(sv_1) = rsf(v_1) = r(sf)(v_1)$.
$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(V, W)$ ist ein Untervektorraum. $\square$

Komposition von linearen Abbildungen

- $f : K^m \to K^n$ und $g : K^p \to K^m$ seien lineare Abbildungen.
  $h = f \circ g : K^p \to K^n : x \mapsto f(g(x))$ ist linear.
  Beweis:

$$\begin{aligned} h(u_1 + u_2) &= f(g(u_1 + u_2)) = f(g(u_1) + g(u_2)) \\ &= f(g(u_1)) + f(g(u_2)) \\ &= h(u_1) + h(u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(ru) &= f(g(ru)) = f(rg(u)) = r(f(g(u)) \\ &= rh(u) \end{aligned}$$

- Sei $f : N \to M$ eine beliebige Abbildung.
  f heißt **injektiv**, wenn gilt: $f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y$
  f heißt **surjektiv**, wenn gilt: $\forall\, y \in M \exists\, x \in N : \; f(x) = y$
  f heißt **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

- Seien V, W Vektorräume, $f : V \to W$ eine bijektive, lineare Abbildung, d. h. $\forall\, w \in W \exists!\, v \in V : \; f(v) = w$.
  Dann existiert die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : W \to V : w \mapsto v \text{ mit } f^{-1}(w) = v \;\Leftrightarrow\; f(v) = w.$$

  Es gilt dann: $f(f^{-1}(w)) = f(v) = w$ und $f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(w) = v$, d. h.

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V\,.$$

- Ist f eine lineare, bijektive Abbildung, so ist auch f^{-1} linear und bijektiv.
  Beweis:
  - f^{-1} ist surjektiv:
    Sei $v \in V$. Dann ist $w = f(v) \;\Leftrightarrow\; v = f^{-1}(w)$.
    $\Rightarrow\; f^{-1}$ ist surjektiv.
  - f^{-1} ist injektiv:
    $f^{-1}(w_1) = f^{-1}(w_2) \;\Rightarrow\; w_1 = f(f^{-1}(w_1)) = f(f^{-1}(w_2)) = w_2$
    $\Rightarrow\; f^{-1}$ ist injektiv.
  - f^{-1} ist linear:
    Sei $w_1 = f(v_1)$ und $w_1 = f(v_2)$.
    $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$ und $sw_1 = sf(v_1) = f(sv_1)$.
    Nach Definition von f^{-1} gilt:
    $f^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$
    $f^{-1}(sw_1) = sv_1 = sf^{-1}(w_1)$.

4.8 Definition:

Isomorphismus

*$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Falls f bijektiv ist, heißt f **Isomorphismus**.*

Beispiel:

Sei $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, d. h. es existiert genau eine Darstellung
$v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$.

Definiere nun folgende Abbildungen:
$\varphi_F : K^n \to V : (r_1, \ldots, r_n)^T \mapsto \sum r_i v_i$
$k_F : V \to K^n : \sum r_i v_i \mapsto (r_1, \ldots, r_n)^T$.

Nach Konstruktion sind beide Abbildungen sowohl Isomorphismen als auch Umkehrabbildungen:
$\varphi_F \circ k_F = \mathrm{id}_V$
$k_F \circ \varphi_F = \mathrm{id}_{K^n}$.

φ_F und k_F sind lineare Abbildungen, d. h. sie sind durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt:
$\varphi_F(e_j) = v_j$ und $k_F(v_j) = e_j$.

Sprechweise: Man sagt, daß zwei Vektorräume V und W **isomorph** sind, falls ein Isomorphismus $f : V \to W$ existiert. Man schreibt: $V \cong W$.
Man kann sich das so vorstellen, daß sich die Räume nicht allzu sehr unterscheiden, d. h. daß sich alle Rechnungen durch den Isomorphismus in den anderen Raum überführen lassen.

4.9 Lemma:

1. *$\mathrm{id} : V \to V$ ist ein Isomorphismus.*
2. *Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch f^{-1} ein Isomorphismus.*
3. *Sind $f : V \to W$ und $g : U \to V$ Isomorphismen, so ist auch $f \circ g : U \to W$ ein Isomorphismus.*

Beweis:
1. ist klar, 2. und 3. folgen aus obigen Überlegungen. □

Aus Lemma 4.9 folgt:
1. $V \cong V$
2. $V \cong W \;\Rightarrow\; W \cong V$
3. $V \cong W \;\wedge U \cong V \;\Rightarrow\; U \cong W$

Das heißt, $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation.

4.10 Satz:

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume. Dann gilt:

$$V \cong W \quad \Leftrightarrow \quad \dim V = \dim W$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Beweis durch Widerspruch:

Annahme: $\dim V \neq \dim W$, sei o. B. d. A. $\dim V = n < \dim W$.
Sei $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V,
sei $f : V \to W$ eine surjektive, lineare Abbildung, d. h. $\forall w \in W \exists v \in V$: $f(v) = w$, aber $v = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i v_i$.

$\Rightarrow \; w = f(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i f(v_i)$.

Das bedeutet, $\{f(v_i) \mid i = 1 \ldots n\}$ ist ein erzeugendes System von W, aber die Anzahl der Elemente eines erzeugenden Systems ist größer oder gleich $\dim W$. Widerspruch!

"$\Leftarrow$" Sei $\dim V = \dim W = n$.

Das Beispiel vorher zeigte, daß $V \cong K^n$ und $W \cong K^n$. Nach Lemma 4.9 gilt dann: $V \cong W$.

$\square$

Satz 4.10 sagt aus: $\qquad \dim V = n \quad \Leftrightarrow \quad V \cong K^n$

4.2 Kern und Bild

4.12 Definition: Kern und Bild

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Der ***Kern*** *von f ist gegeben durch*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

Das ***Bild*** *von f ist erklärt als*

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in W \mid \exists v \in V : \; w = f(v)\}$$

- $\mathrm{Im}(f)$ und $\mathrm{Ker}(f)$ sind Untervektorräume.

  Beweis:

  $\mathrm{Im}(f)$: $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$, da $f(0) = 0$ ist.
  Seien $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f) \;\Rightarrow\; \exists\, v_1, v_2 \in V : \; w_1 = f(v_1)$ und $w_2 = f(v_2)$.
  $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in \mathrm{Im}(f)$.
  Sei $w \in \mathrm{Im}(f)$ und $r \in K \;\Rightarrow\; \exists\, v \in V : \; w = f(v)$.
  $rw = rf(v) = f(rv) \in \mathrm{Im}(f)$.

  $\mathrm{Ker}(f)$: $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$, da $f(0) = 0$ ist, d. h. $0 \in \mathrm{Ker}(f)$.
  Seien $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f) \;\Rightarrow\; f(v_1) = f(v_2) = 0$.
  Also ist $f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) = 0 \;\Rightarrow\; v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.
  Sei $v \in \mathrm{Ker}(f)$ und $r \in K \;\Rightarrow\; f(v) = 0$.
  Also ist $rf(v) = f(rv) = 0 \;\Rightarrow\; rv \in \mathrm{Ker}(f)$. $\square$

- Sei $A \in K^{m \times n}$, $f_A : K^n \to K^m : x \mapsto Ax$. Dann gilt:

$$\mathbf{Ker}(\boldsymbol{f_A}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K^n} \mid \boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}\} = \boldsymbol{L_H(A)}.$$

  $\mathrm{Im}(f_A) = \{c \in K^m \mid c = Ax,\ x \in K^n\}$.
  $x \in K^n$, d. h. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i e_i$.
  Dann ist $c = Ax = A \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} r_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i A e_i$.
  $Ae_i =$ i-te Spalte von A. Da $U_S(A)$ die Menge der Linearkombinationen der Spalten von A ist, gilt:

$$\mathbf{Im}(\boldsymbol{f_A}) = \boldsymbol{U_S(A)}.$$

- Sei $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein System von Vektoren in V.
  $\varphi_S : K^n \to V : (r_1, \ldots, r_n)^T \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} r_i v_i$.
  Nach Satz 4.5 ist φ_S eindeutig bestimmt und linear.

$$\mathrm{Im}(\varphi_S) = L(v_1, \ldots, v_n)$$

  $\mathrm{Ker}(\varphi_S) =$ Darstellung der Null mit Hilfe von Vektoren aus S.

$$\mathrm{Ker}(\varphi_S) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad S \text{ linear unabhängig}$$

- Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$
$$f \text{ ist surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = W$$

  Beweis:
  a) Injektivität:
  "$\Rightarrow$" Sei f injektiv, sei $v \in V$ mit $f(v) = 0$.
  Aber es gilt: $f(0) = 0$. Da f injektiv ist, folgt aus $f(v) = f(0)$, daß $v = 0$ ist, d. h. $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
  "$\Leftarrow$" Sei $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Sei $f(u) = f(v)$.
  Dann gilt: $0 = f(u - v)$, d. h. $u - v \in \mathrm{Ker}(f)$. Dann ist $u - v = 0$ bzw. $u = v$. Also ist f injektiv.
  b) Surjektivität: Folgt direkt aus der Definition von $\mathrm{Im}(f)$.

  □

- $f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung.
  $\mathrm{Im}(f)$ ist die Menge der $w \in W$, für die die Gleichung $f(x) = w$ eine Lösung besitzt.
  $\mathrm{Ker}(f)$ ist die "Unbestimmtheit" der Lösung. Sei x_0 eine spezielle Lösung, d. h. $f(x_0) = w$, dann erhält man alle Lösungen durch Addition eines Elementes von $\mathrm{Ker}(f)$ zu x_0.

4.13 Satz:
Sei $f : V \to W$ *linear und sei* $\dim V < \infty$. *Dann gilt:*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim V.$$

<u>Beweis:</u>
Sei $F = \{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ und $G = \{w_1, \ldots, w_l\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$. Dann existieren $u_i \in V$ mit $w_i = f(u_i)$. Es ist zu zeigen:
$H := \{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l\}$ ist eine Basis von V.

- Lineare Unabhängigkeit: Sei $0 = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j u_j + \sum\limits_{j=1}^{k} s_j v_j$.

  $0 = f(0) = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j f(u_j) + \sum\limits_{j=1}^{k} s_j f(v_j)$.

  Da $v_j \in \mathrm{Ker}(f)$ ist, gilt: $\sum\limits_{j=1}^{k} s_j f(v_j) = 0$.

  $\Rightarrow \ 0 = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j f(u_j) = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j w_j$.
  Die w_j bilden aber eine Basis, d. h. $r_j = 0$ für alle $j = 1 \ldots l$.

  Also bleibt übrig: $0 = \sum\limits_{j=1}^{k} s_j v_j$. Aber die v_j bilden ebenfalls eine Basis.
  Also gilt: $s_j = 0$ für alle $j = 1 \ldots k$.

- erzeugendes System:
  Sei $v \in V \ \Rightarrow \ f(v) \in \mathrm{Im}(f)$.
  $f(v) = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j w_j = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j f(u_j) = \sum\limits_{j=1}^{l} f(\sum\limits_{j=1}^{l} r_j u_j)$.

  $\Rightarrow \ v - \sum\limits_{j=1}^{l} r_j u_j \in \mathrm{Ker}(f)$.

  $\Rightarrow \ v - \sum\limits_{j=1}^{l} r_j u_j = \sum\limits_{j=1}^{k} s_j v_j$.

  $\Rightarrow \ v = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j u_j + \sum\limits_{j=1}^{k} s_j v_j$.

$\square$

4.14 Definition: Rang
Der ***Rang*** *einer linearen Abbildung* f *ist gegeben durch*

$$\mathrm{Rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

- $\mathrm{Rang}(f)$ ist nur definiert, wenn $\dim(\mathrm{Im}(f)) < \infty$ ist.
- Dies ist nur gegeben, wenn $\dim V < \infty$ oder $\dim W < \infty$.
- Insbesondere gilt:

$$\mathrm{Rang}(f) \leq \min\{\dim V, \dim W\}$$

Beweis:
Sei $\dim W < \infty$, $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$ ist ein Untervektorraum. Deshalb gilt: $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim W$.
Sei $\dim V < \infty$. Dann existiert eine Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V.
$\Rightarrow$ $\{f(v_i) \mid i = 1 \ldots n\}$ ist ein erzeugendes System von $\mathrm{Im}(f)$.
$\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim V$. □

Aus Satz 4.13 läßt sich leicht die sog. **Rangformel** ableiten:

$$\mathrm{Rang}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f) \tag{4.15}$$

Sei $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$, sei $r = \min\{\dim V, \dim W\}$,
f habe Höchstrang, d. h. $\mathrm{Rang}(f) = r$. Dann gilt:
a) Falls $r = \dim W$, dann ist f surjektiv,
b) falls $r = \dim V$, dann ist $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$, also ist f injektiv.

4.16 Satz:

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\dim V = \dim W$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist injektiv*
2. *f ist surjektiv*
3. *f ist ein Isomorphismus*

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (3): Sei f injektiv, d. h. $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Nach 4.14 gilt dann $\mathrm{Rang}(f) = \dim V = \dim W$ nach Voraussetzung. $\Rightarrow$ f surjektiv.
$\Rightarrow$ f ist ein Isomorphismus.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei f surjektiv, d. h. $\mathrm{Rang}(f) = \dim W = \dim V$.
$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ $\Rightarrow$ f injektiv.
(3) $\Rightarrow$ (1),(2) klar. □

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix. Von dieser Matrix werden 3 verschiedene Räume erzeugt: $L_H(A)$, $U_S(A)$ und $U_Z(A)$.
Zu Beginn von Paragraph 4.2 haben wir festgestellt: $\mathrm{Ker}(f_A) = L_H(A)$ und $\mathrm{Im}(f_A) = U_S(A)$.
Aus der Rangformel 4.15 folgt:

$$\dim L_H(A) + \dim U_S(A) = n$$

Aus dem Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme folgt:
$D = \{j_1, \ldots, j_r\} \quad \Rightarrow \quad \dim L_H(A) = n - r$ und $\dim U_Z(A) = r$.

$$\dim L_H(A) + \dim U_Z(A) = n$$

4.17 Satz:
Für jede Matrix stimmen Zeilenrang und Spaltenrang überein, d. h.

$$\dim U_Z(A) = \dim U_S(A)$$

Beweis:
siehe oben. $\square$

4.18 Definition: Rang einer Matrix
Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix. Der ***Rang von A****, in Zeichen* Rang(A) *ist der Rang der durch A induzierten Abbildung f_A.*

Analog zu den Zeilenumformungen definieren wir sogenannte **elementare Spaltenumformungen** durch:

1. Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $\neq 0$
2. Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen
3. Vertauschen zweier Spalten.

Spaltenumformungen verändern den Spaltenraum nicht (Beweis analog zu Zeilenumformungen). Wir können deshalb leicht eine Basis des Spaltenraums ermitteln.
Achtung !! Zeilenumformungen verändern den Spaltenraum und umgekehrt !!

4.19 Folgerung:
Zeilen- und Spaltenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht !

Beweis:
Folgt direkt aus Satz 4.17 und Definition 4.18. $\square$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix}2&7&1&1\\3&2&0&5\\6&1&0&1\\5&9&1&6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&7&1&1\\3&2&0&5\\6&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&0&1&0\\3&2&0&5\\6&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3}\\0&-3&0&-9\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3}\\0&1&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3.$$

Sei $A \in K^{m\times n}$, sei $L_H(A)$ der Lösungsraum des homogenen Systems.
Wir wissen nach Satz 1.25 und Satz 3.12:

$$\operatorname{Rang}(A) = r \;\Leftrightarrow\; \dim L_H(A) = n - r.$$

Sei $b \in K^n$ die rechte Seite zu A, $L(A,b)$ sei die Lösungsmenge des inhomogenen Systems. Dann gilt: $L(A,b)$ ist leer oder $L(A,b) = c_0 + L_H(A)$, d. h. $L(A,b)$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - r$.

4.20 Satz:

Sei $A \in K^{m\times n}$ und sei $Ax = b$ lösbar. Dann ist die Lösung genau dann eindeutig bestimmt, wenn $\operatorname{Rang}(A) = n$ ist.

Beweis:

Folgerung 1.23 besagt: Sei $Ax = b$ lösbar. Dann gilt:
$\exists!$ Lösung $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
$\Leftrightarrow \dim L_H(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n$. □

4.21 Satz:

Seien $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$. Ist $(A,b) \in K^{m\times(n+1)}$ die Matrix, welche aus A durch Hinzufügen der Spalte b entsteht, so gilt:

$$A \text{ ist lösbar} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Rang}(A,b) = \operatorname{Rang}(A)$$

Beweis:

Seien $A_1, \ldots, A_n \in K^n$ die Spalten von A. Es gilt:

$$\begin{aligned}
Ax = b \text{ lösbar} \quad &\Leftrightarrow \quad b \in L(A_1, \ldots, A_n)\\
&\Leftrightarrow \quad L(A_1, \ldots, A_n) = L(A_1, \ldots, A_n, b)\\
&\Leftrightarrow \quad U_S(A) = U_S(A,b)\\
&\Leftrightarrow \quad \dim U_S(A) = \dim U_S(A,b)\\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A,b)
\end{aligned}$$

□

4.22 Folgerung:

$A \in K^{m\times n}$ sei eine Matrix. $Ax = b$ ist genau dann für alle $b \in K^m$ lösbar, wenn $\operatorname{Rang}(A) = m$ ist.

Beweis:

$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A,b)$ für alle $b \in K^m \;\Leftrightarrow\; \forall\, b \in K^m:\; b \in U_S(A) \subseteq K^m$
$\Rightarrow\; U_S(A) = K^m \;\Rightarrow\; \dim U_S(A) = m = \operatorname{Rang}(A)$. □

Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix. Sie induziert die Abbildung

$$f_A : K^n \to K^m : x \mapsto Ax.$$

Nach Satz 4.20 ist f_A injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(f_A) = n$ ist.
Nach Folgerung 4.22 ist f_A surjektiv genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(f_A) = m$ ist.
Ist $\mathrm{Rang}(f_A) = \mathrm{Rang}(A) = m = n$, ist f_A bijektiv und linear, also ein Isomorphismus.

4.23 Satz:
$A \in K^{n \times n}$ sei eine quadratische Matrix. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *$Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung*
2. *$\forall\, b \in K^n$ hat das System $Ax = b$ mindestens eine Lösung.*
3. *$\forall\, b \in K^n$ hat das System $Ax = b$ genau eine Lösung.*
4. $\mathrm{Rang}(A) = n$

Beweis:
Siehe Satz 4.20 und Folgerung 4.22. □

4.3 Matrix einer linearen Abbildung

$f : K^n \to K^m$ sei eine lineare Abbildung. Nach Satz 4.5 und Satz 4.6 existiert eine durch eine Matrix A induzierte Abbildung f_A mit $f = f_A$, wobei $f_A : K^n \to K^m : x \mapsto Ax$. Für die j-te Spalte A_j von A gilt: $A_j = f(e_j)$.

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i \tag{4.24}$$

Sei $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, d. h. es existiert genau eine Darstellung $v = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i v_i$ als Linearkombination der Basisvektoren v_i.
Die Koordinatenfunktion $k_F(v) = (r_1, \ldots, r_n)^T$ ordnet jedem Vektor seine Koordinaten bezüglich der Basis F zu.

$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. f ist eindeutig bestimmt durch die Bilder $f(v_i),\ i = 1 \ldots n$, oder auch, falls G eine Basis von W ist, durch die G-Koordinaten von $f(v_i),\ i = 1 \ldots n$.

4.25 Definition:
$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung, $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $G = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W. Die ***Matrix von f bezüglich F und G*** *ist die Matrix $A \in K^{m \times n}$, deren j-te Spalte aus den G-Koordinaten von $f(v_j)$ besteht.*

Formel 4.24 besagt: $f_A(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$.
Aus 4.25 folgt:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad j = 1 \ldots n \tag{4.26}$$

Merkregel: Bilder der Basisvektoren in die Spalten !!

4.27 Satz:
$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung, A sei die Matrix von f bezüglich der Basen F von V und G von W. Für $v \in V$ erhält man die G-Koordinaten von $f(v)$, indem man die F-Koordinaten von v als Spaltenvektor auffasst und diesen mit A multipliziert.

Beweis:
$F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von V, $G = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W, $A = (a_{ij})$ sei die Matrix von f bzgl. F und G. Sei $r = (r_1, \ldots, r_n)$.
$\Rightarrow\ f(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,\ v = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j v_j$.

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_j r_j f(v_j) = \sum_j r_j \cdot \sum_i a_{ij} w_i \\ &= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} r_j \right) w_i = \sum_i (A \cdot r)_i w_i \end{aligned} \tag{4.28}$$

Das heißt, $(A \cdot r)_i$ ist die i-te G-Koordinate von $f(v)$. $\square$

4.29 Folgerung:
Sei F eine Basis von V und G eine Basis von W; sei $A \in K^{m \times n}$ gegeben. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$, deren Matrix bezüglich F und G genau A ist.

Beweis:
1. Eindeutigkeit:
   Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basis eindeutig bestimmt. Die Bilder der Basis sind die Spalten der Matrix A.

2. Existenz:
   Sei $A = (a_{ij})$ und $v = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j v_j$.
   $f(v) := \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.
   Insbesondere gilt für die Basisvektoren: $v_j = \sum\limits_{i \neq j} 0 \cdot v_i + 1 \cdot v_j$.
   $\Rightarrow \ f(v_j) = \sum\limits_{i} a_{ij} w_i$, d. h. A ist die Matrix von f bzgl. F und G.

3. Linearität:
   Sei $u = \sum\limits_{j} s_j v_j$ und $v = \sum\limits_{j} r_j v_j$.
   Dann ist $u + v = \sum\limits_{j} (s_j + r_j) v_j$.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \sum_j (s_j + r_j) \sum_i a_{ij} w_i \\ &= \sum_j s_j \cdot \sum_i a_{ij} w_i + \sum_j s_j \cdot \sum_i a_{ij} w_i \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

   $f(ru) = rf(u)$ ist völlig analog zu beweisen.

□

Die Matrix von f bezüglich F und G hängt von der Wahl von F und G ab. Sie wird mit

$$M_G^F(f)$$

bezeichnet. Mit dieser Bezeichung läßt sich Satz 4.27 kürzer formulieren:

$$k_G(f(v)) = M_G^F(f) \cdot k_F(v) \tag{4.30}$$

Beispiel:

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax$. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ sei die Matrix von f bezüglich der Standardbasen $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ in $\mathbb{R}^3$ und $T = \{e_1, e_2\}$ in $\mathbb{R}^2$, d. h. $A = M_T^S(f)$.
   $F = \{v_1, v_2, v_2\}$ mit $v_1 = (1,1,1)^T$, $v_2 = (1,2,3)^T$ und $v_3 = (0,-2,5)^T$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^3$.
   $G = \{w_1, w_2\}$ mit $w_1 = (1,1)^T$ und $w_2 = (1,-1)^T$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

   a) Standardkoordinaten der Bilder von v_1, v_2 und v_3 in die Spalten einer Matrix liefert $M_T^F(f)$:
      $f(v_j) = Av_j$, d. h. $f(v_1) = (4,3)^T$, $f(v_2) = (9,3)^T$, $f(v_3) = (-13,2)^T$.
      Also ergibt sich: $M_T^F(f) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -13 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Bilder der Standardbasis S des $\mathbb{R}^3$ in G-Koordinaten umwandeln, d. h. T durch G ausdrücken. So erhält man $M_G^S(f)$.
$e_1 = (1,0)^T = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \quad \Rightarrow \quad k_G(e_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$,
$e_2 = (0,1)^T = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \quad \Rightarrow \quad k_G(e_2) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$.
$f(f_i)$ in G-Koordinaten ausdrücken:
$f(f_1) = (2,1)^T = 2e_1 + e_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}(w_1 + w_2) + \frac{1}{2}(w_1 - w_2) = \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$
$f(f_2) = (-1,4)^T = \frac{3}{2}w_1 - \frac{5}{2}w_2$
$f(f_3) = (3,-2)^T = \frac{1}{2}w_1 + \frac{5}{2}w_2$.
$\Rightarrow \quad M_G^S(f) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Die Matrix von f bezüglich F und G erhält man, indem man $f(v_i)$ durch G ausdrückt.
$f(v_1) = (4,3)^T = 4e_1 + 3e_2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(w_1 + w_2) + 3 \cdot \frac{1}{2}(w_1 - w_2) = \frac{7}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$
$f(v_2) = (9,3)^T = 6w_1 + 3w_2$
$f(v_3) = (-13,2)^T = -\frac{11}{2}w_1 - \frac{15}{2}w_2$.
$\Rightarrow \quad M_G^F(f) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 7 & 12 & -11 \\ 1 & 6 & -15 \end{smallmatrix}\right)$.

2. $f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung, $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$.
Gesucht sind Basen von V und W, so daß $M_G^F(f)$ einfach ist.
Sei $G_1 = \{w_1, \ldots, w_r\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$.
Nach Satz 3.13 ist es möglich, G_1 zu einer Basis von W zu ergänzen:
sei also $G = \{w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, w_m\}$ die ergänzte Basis von W.
Sei $v_i,\ i = 1 \ldots r$ derart, daß $f(v_i) = w_i$.
Setze dann $F_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$.
$F_2 = \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$.
Gemäß dem Beweis von Satz 4.13 ist dann $F = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.
Also gilt für die Abbildung f:

$$f(v_j) = \begin{cases} w_j & \text{für } j = 1, \ldots, r \\ 0 & \text{für } j = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

$k_F(w_j) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = e_j$, wobei die 1 an der j-ten Stelle steht.
Die Matrix $M_G^F(f)$ hat also folgende Gestalt:

$$M_G^F(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Darstellung mittels kommutativem Diagramm

F sei eine Basis von V. Die F-Koordinaten bilden dann einen Isomorphismus

$$k_F : V \to K^n : v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i \mapsto (r_1, \ldots, r_n)^T$$

G sei eine Basis von W. Die G-Koordinaten bilden dann ebenfalls einen Isomorphismus

$$k_G : W \to K^m : w = \sum_{i=1}^{m} s_i w_i \mapsto (s_1, \ldots, s_m)^T$$

$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. $A \in K^{m\times n}$ sei die dazugehörige Matrix $M_G^F(f)$. Sie induziert die lineare Abbildung $f_A : K^n \to K^m : x \mapsto Ax$.
Satz 4.27 besagt nun:

$$k_G(f(v)) = A \cdot k_F(v) = f_A(k_F(v))$$

$$k_G \circ f = f_A \circ k_F$$

Als kommutatives Diagramm dargestellt:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ k_F \big\downarrow & & \big\downarrow k_G \\ K^n & \xrightarrow{f_A} & K^m \end{array}$$

4.31 Satz:
$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Ist A die Matrix von f bzgl. einer Basis von V und einer Basis von W, so gilt:

$$\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(A)$$

<u>Beweis:</u>
Aus $k_G \circ f = f_A \circ k_F$ folgt: $k_G(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(f_A)$.
Sei $w = f(v) \in \mathrm{Im}(f)$.
$\Rightarrow\ k_G(w) = k_G(f(v)) = f_A(k_F(v)) \in \mathrm{Im}(f_A))$
$\Rightarrow\ k_G(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Im}(f_A)$.
Sei $c \in \mathrm{Im}(f_A) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x \in K^n :\ f_A(x) = c$.
Aber: $k_F : V \to K^n$ ist surjektiv.
$\Rightarrow\ \exists\, v \in V :\ k_F(v) = x$.
$\Rightarrow\ c = f_A(x) = f_A(k_F(v)) = k_G(f(v)) \in k_G(\mathrm{Im}(f))$.
Also gilt: $k_G(\mathrm{Im}(f)) \supseteq \mathrm{Im}(f_A)$.

$$k_G(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(f_A)$$

Wir wissen: k_G ist ein Isomorphismus.
$\Rightarrow\ k_G$ eingeschränkt auf $\mathrm{Im}(f)$ ist wieder ein Isomorphismus.
$k_G(\mathrm{Im}(f))$ ist bijektiv, d. h. $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Im}(f_A)$.
$\mathrm{Rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f_A)) = \mathrm{Rang}(A)$. $\square$

Koordinaten für $\mathcal{L}(V, W)$

4.32 Satz:

V und W seien Vektorräume, $\dim V = n$, $\dim W = m$; F sei eine Basis von V und G sei eine Basis von W. Ordnet man jeder linearen Abbildung $f : V \to W$, d. h. $f \in \mathcal{L}(V, W)$ ihre Matrix $M_G^F(f)$ bezüglich F und G zu, so erhält man einen Isomorphismus:

$$M_G^F : \mathcal{L}(V, W) \to K^{m \times n}$$

Beweis:

Sei $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $G = \{w_1, \ldots, w_m\}$.

- Ist M_G^F linear,?
  Seien $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$. Zu zeigen: $M_G^F(f + g) = M_G^F(f) + M_G^F(g)$.
  $(f + g)(v_i) = f(v_i) + g(v_i)$, da $\mathcal{L}(V, W)$ ein Vektorraum ist.
  $$\underbrace{k_G((f+g)(v_i))}_{\substack{\text{i-te Spalte von} \\ M_G^F(f+g)}} = \underbrace{k_G(f(v_i))}_{\substack{\text{i-te Spalte von} \\ M_G^F(f)}} + \underbrace{k_G(g(v_i))}_{\substack{\text{i-te Spalte von} \\ M_G^F(g)}}$$
  Sei $r \in K$. Analog wird gezeigt, daß gilt: $M_G^F(rf) = rM_G^F(f)$.
- Ist M_G^F bijektiv ?
  Nach Folgerung 4.29 gilt: $\forall\, A \in K^{m \times n}\ \exists!\, f \in \mathcal{L}(V, W) :\ M_G^F(f) = A$.

$\square$

Insbesondere gilt: $\mathcal{L}(V, W) \cong K^{m \times n}$.
Also gilt: $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim K^{m \times n} = \dim V \cdot \dim W = m \cdot n$.

Unser Ziel ist zu zeigen, daß M_G^F ein Koordinatenisomorphismus ist.
X sei ein Vektorraum, H sei eine Basis von X.

$$k_H(v) = (r_1, \ldots, r_n)^T \quad \Leftrightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (k_H(v))_i v_i$$

Standardbasis von $K^{m \times n}$:
E_{ij} sei diejenige Matrix, die an der Stelle mit den Koordinaten (i, j) eine 1 und sonst nur Nullen hat.
Beispiel: $m = n = 2$: Folgende Matrizen bilden eine Basis von $K^{2 \times 2}$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oder anders gesagt: die k-te Spalte von E_{ij} ist e_j, falls $k = j$ und sonst 0.

E_{ij} induziert eine Abbildung $f_{ij} : x \mapsto E_{ij}x$, für die gilt:

$$f_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_i & \text{falls } k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

denn die k-te Spalte der Matrix von f_{ij} sind die G-Koordinaten von $f_{ij}(v_k)$.

Behauptung: $\{f_{ij} \mid i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots m\}$ ist eine Basis von $\mathcal{L}(V, W)$.
Beweis:

1. Erzeugendes System:
   Sei $f \in \mathcal{L}(V, W),\ A = M_G^F(f)$.
   Definiere dann: $f_A := \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} f_{ij}$.
   $f_A(v_k) = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} f_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_i & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \sum\limits_i a_{ik} w_i = f(v_k)$.
   $\Rightarrow\ f_A = f \in L(f_{ij})$.
2. Lineare Unabhängigkeit:
   Es ist zu zeigen, daß die Darstellung $f_A = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} f_{ij}$ eindeutig ist.
   Sei also $f = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} f_{ij} = \sum\limits_i \sum\limits_j b_{ij} f_{ij}$.
   $f(v_k) = \sum\limits_i a_{ik} w_i = \sum\limits_i b_{ik} w_i$.
   Sei k fest. Die w_i bilden eine Basis. $\Rightarrow\ a_{ik} = b_{ik},\ i = 1 \dots n$, wobei k fest, aber beliebig ist.
   Läßt man jetzt k von 1 bis m laufen, so gilt für alle i und k: $a_{ij} = b_{ik}$.

$\square$

Aus obigen Betrachtungen folgt:

$$f = \sum_i \sum_j \big(M_G^F(f)\big)_{ij} f_{ij}$$

Das heißt, M_G^F ist ein Koordinatenisomorphismus.

Komposition von linearen Abbildungen

Wie sieht die Matrix der Komposition zweier linearer Abbildungen aus?
Dazu benötigen wir das sog. Matrizenprodukt:

- Seien $f : V \to W$ und $g : U \to V$ lineare Abbildungen,
  $F = \{v_1, \dots, v_n\}$ sei eine Basis von V,
  $G = \{w_1, \dots, w_m\}$ sei eine Basis von W,
  $H = \{u_1, \dots, u_p\}$ sei eine Basis von U.
- Zu f, g, F, G, H haben wir:
  $A = M_G^F(f) \in K^{m \times n}$, $B = M_F^H(g) \in K^{n \times p}$ und $C = M_G^H(f \circ g) \in K^{m \times p}$.
  Wir wollen C mit Hilfe von A und B ausdrücken.

– Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{j-te Spalte von } C &= \text{G-Koordinaten von } (f \circ g)(v_j) \\ &= \text{G-Koordinaten von } f(g(v_j)) \\ &= A \cdot (\text{ F-Koordinaten von } g(u_j)) \\ &= A \cdot (\text{j-te Spalte von } B) \end{aligned}$$

4.33 Definition:

Produkt von Matrizen

Unter dem ***Produkt zweier Matrizen*** $A \in K^{m \times n}$ *und* $B \in K^{n \times p}$ *versteht man die Matrix* $C = A \cdot B \in K^{m \times p}$*, deren j-te Spalte das Produkt von* A *mit der j-ten Spalte von* B *ist.*

$$C = A \cdot B : \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Die i-te Komponente der j-ten Spalte erhält man also, indem man die i-te Zeile von A mit der j-ten Spalte von B multipliziert.

4.34 Satz:

$f : V \to W$ und $g : U \to V$ seien lineare Abbildungen, F sei eine Basis von V, G eine Basis von W und H eine Basis von U.
Sei $A = M_G^F(f)$ und $B = M_F^H(g)$. Dann ist die Matrix von $f \circ g : U \to W$ bezüglich H und G das Produkt $A \cdot B$.

$$M_G^F(f) \cdot M_F^H(g) = M_G^H(f \circ g)$$

Beweis:

siehe oben. □

Beispiel:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (-x_2, x_1 - 2x_3, x_1 + x_2 + x_3)^T$
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2)^T \mapsto (x_1 + x_2, 0, 2x_2)^T$.

$$M_S^S(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_S^S(g) = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C = M_S^S(f \circ g) = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(f \circ g)(x_1, x_2)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (0, x_1 - 3x_2, x_1 + 3x_2)^T.$$

4.4 Matrizenrechnung

Sei $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times p}$. Dann ist $C = A \cdot B \in K^{m \times p}$, und es gilt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$A \cdot B$ ist nur definiert, wenn die Zeilen von A und die Spalten von B gleich viele Komponenten haben.
Falls $A \cdot B$ definiert ist, dann muß $B \cdot A$ nicht definiert sein. $B \cdot A$ ist definiert, falls $m = p$ ist.

Besonderheiten:

1. Matrizenmultiplikation ist *nicht kommutativ*: Seien $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert. Dann muß nicht gelten: $A \cdot B = B \cdot A$.
   Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 14 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Es gibt *Nullteiler*, d. h. zwei von Null verschiedene Matrizen, deren Produkt Null ist.
   Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.35 Lemma:
Für Matrizen $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$ und $C \in K^{p \times q}$ gilt stets:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Beweis:

Sei $X = A \cdot B$, d. h. $x_{ik} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}$.
$\big((A \cdot B) \cdot C\big)_{ij} = \sum\limits_{k} x_{ik} c_{kj} = \sum\limits_{k} \sum\limits_{l} a_{il} b_{lk} c_{kj}$.
Sei $Y = B \cdot C$, d. h. $y_{lj} = \sum\limits_{k} b_{lk} c_{kj}$.
$\big(A \cdot (B \cdot C)\big)_{ij} = \sum\limits_{l} a_{il} y_{lj} = \sum\limits_{j} \sum\limits_{k} a_{il} b_{lk} c_{kj}$.

□

4.36 Lemma:
Für Matrizen $A,\ A_1,\ A_2 \in K^{m\times n}$ und $B,\ B_1,\ B_2 \in K^{n\times p}$ gilt:

$$A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$$

Beweis:
Analog zu 4.35 $\square$

4.37 Lemma:
Für Matrizen $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times p}$ und $r \in K$ gilt:

$$A \cdot (rB) = r(A \cdot B) = (rA) \cdot B$$

Beweis:
Analog zu 4.35 $\square$

Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann sind $A + B$ und $A \cdot B$ definiert und wieder Elemente von $K^{n\times n}$. Man sagt, daß $K^{n\times n}$ ein *Ring* ist.

4.38 Definition: Ring
*Unter einem **Ring** versteht man eine Menge R, auf der eine Addition $(+)$ und eine Multiplikation $(\cdot)$ so erklärt sind, daß gelten:*

R1: Assoziativität der Addition:
$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad \forall\, x, y, z \in R$$
R2: Kommutativität der Addition:
$$x + y = y + x \qquad \forall\, x, y \in R$$
R3: Existenz der Null:
$$\exists\, 0 \in R \textit{ mit } 0 + x = x + 0 = x \qquad \forall\, x \in R.$$
R4: Existenz des Negativen:
$$\forall\, x \in R\ \exists -x \in R: \quad x + (-x) = -x + x = 0$$
R5: Assoziativität der Multiplikation:
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \forall\, x, y, z \in R$$
R6: Existenz der Eins:
$$\exists\, 1 \in R: \quad 1 \cdot x = x \qquad \forall\, x \in R$$
R7: Distributivität:
$$x \cdot (y_1 + y_2) = x \cdot y_1 + x \cdot y_2$$
$$(x_1 + x_2) \cdot y = x_1 \cdot y + x_2 \cdot y$$

Beispiel:

$K^{n\times n}$ ist ein Ring.
R1-R4 gelten, da $K^{n\times n}$ ein Vektorraum ist.
R5, R7 wurden gerade in den Lemmata 4.35 und 4.36 bewiesen.
R6: Das Einselement ist: $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

– Manchmal wird $K^{n\times n}$ als $M_n(K)$ bezeichnet.

– Für $n = 1$ ist $K^{1\times 1} \cong K$ ein kommutativer Ring.

– Für $n \geq 2$ ist es das Standardbeispiel für einen nichtkommutativen Ring. Matrizenmultiplikation und Skalarmultiplikation erfüllen Lemma 4.37. Dann nennt man die Menge eine *K-Algebra*.

4.39 Definition:

K-Algebra

Sei K ein Körper und R ein Ring, der gleichzeitig ein K-Vektorraum ist, so daß außerdem gilt:

$$r(u \cdot v) = (ru) \cdot v = u \cdot (rv) \qquad \forall\, u, v \in R\ \forall\, r \in K$$

so heißt R eine ***K-Algebra****.*

1. $K^{n\times n}$ ist eine K-Algebra.
2. V sei ein K-Vektorraum.
   Lineare Abbildungen $f : V \to V$ heißen **Endomorphismen**.
   Wir wissen: $\mathcal{L}(V, V)$ ist ein K-Vektorraum.
   Auf $\mathcal{L}(V, V)$ ist eine Multiplikation durch Komposition $f \circ g$ definiert.
   $\mathcal{L}(V, V)$ ist bzgl. Komposition abgeschlossen und erfüllt die Ringaxiome.
   Deshalb heißt $\mathcal{L}(V, V)$ **Endomorphismenring**.
   In $\mathcal{L}(V, V)$ gilt die folgende Verträglichkeit: $r \cdot (f \circ g) = (rf) \circ g = f \circ (rg)$.
   $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(V, V)$ ist eine K-Algebra.
3. Sei $\dim V = n$, sei F eine Basis von V.

   $$M_F^F : \mathcal{L}(V, V) \to K^{n\times n} : f \mapsto M_F^F(f)$$

   Wir wissen: M_F^F ist ein Isomorphismus. M_F^F respektiert Addition und Skalarmultiplikation. Nach Satz 4.34 gilt:

   $$M_F^F(f \circ g) = M_F^F(f) \cdot M_F^F(g)$$

   $$M_F^F(\mathrm{id}) = E_n$$

   $\Rightarrow$ M_F^F respektiert auch die Multiplikation.
   M_F^F ist ein **Isomorphismus von K-Algebren**.

Invertierbare Matrizen

4.40 Definition:

Invertierbar

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt ***invertierbar****, wenn es eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ gibt, so daß gilt:*

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

• Es gibt höchstens eine inverse Matrix.
Beweis: Seien B, C derart, daß $C \cdot A = E_n$ und $B \cdot A = E_n$. Dann gilt:
$B = E_n \cdot B = (C \cdot A) \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = C \cdot E_n = C$.
• Falls A invertierbar ist, so heißt die eindeutig bestimmte Matrix B mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$ **Inverse** von A.
Bezeichnung: $A^{-1} := B$.

4.41 Lemma:

1. *Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, so ist auch A^{-1} invertierbar und es gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Sind $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar, so ist auch ihr Produkt $A \cdot B$ invertierbar, und es gilt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*

Beweis:

1. Nach Definition gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$.
   Das bedeutet, daß A die Inverse zu A^{-1} ist.
2. $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot E_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = E_n$.
   $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E_n \cdot A^{-1} = E_n$.

□

Bezeichnung:

$$Gl_n(K) := \{A \in K^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}.$$

Seien $A, B \in Gl_n(K)$. Dann sind auch $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^{-1} und $B^{-1} \in Gl_n(K)$. Außerdem ist $E_n \in Gl_n(K)$. Deshalb nennt man $Gl_n(K)$ eine Gruppe.

4.42 Definition:

Gruppe

Unter einer ***Gruppe*** *versteht man eine Menge G, auf der eine Multiplikation (geschrieben $x \cdot y$) so erklärt ist, daß gilt:*

G1: Assoziativität:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \forall\, x, y, z \in G$$

G2: Existenz der Eins:

$$\exists\, 1 \in G\ \forall x \in G:\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

G3: Existenz des Inversen:

$$\forall\, x \in G\ \exists\, x^{-1} \in G:\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

- Nach Lemma 4.41 ist $Gl_n(K)$ eine Gruppe. Falls $n \geq 2$ ist, ist sie nicht kommutativ.

- $(Gl_n(K), +)$ ist nicht abgeschlossen, denn, wenn A invertierbar ist, dann ist auch $-A$ invertierbar, aber $A + (-A) = 0$ ist nicht invertierbar.

- $M_F^F : \mathcal{L}(V, V) \to K^{n\times n} : f \mapsto M_F^F(f)$ ist ein Isomorphismus von K-Algebren. M_F^F bildet invertierbare Elemente aufeinander ab.

  Beweis:

  Sei f invertierbar, d. h. f^{-1} existiert und es gilt $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.
  $M_F^F(\mathrm{id}) = E_n = M_F^F(f \circ f^{-1}) = M_F^F(f) \cdot M_F^F(f^{-1}) = M_F^F(f^{-1}) \cdot M_F^F(f)$.
  $\Rightarrow\ \left(M_F^F(f)\right)^{-1} = M_F^F(f^{-1})$.
  Sei A invertierbar, d. h. A^{-1} existiert und es gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$.
  M_F^F ist ein Isomorphismus, d. h. $\exists\, f, g \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $A = M_F^F(f)$ und $A^{-1} = M_F^F(g)$.
  $M_F^F(f \circ g) = M_F^F(f) \cdot M_F^F(g) = A \cdot A^{-1} = E_n = M_F^F(\mathrm{id})$.
  $\Rightarrow\ f \circ g = \mathrm{id}$
  Analog weist man nach: $g \circ f = \mathrm{id}$.
  Daraus folgt: $g = f^{-1}$. □

- f^{-1} existiere, d. h. f ist injektiv und endomorph. Also ist f ein Isomorphismus und ein Endomorphismus zugleich. Dann heißt f **Automorphismus**.

$$\mathrm{Aut}(V) := \{f \in \mathcal{L}(V, V) \mid f \text{ ist ein Isomorphismus}\}$$

4.43 Satz:

V und W seien Vektorräume der gleichen Dimension. Ist A die Matrix einer linearen Abbildung $f : V \to W$ bezüglich einer Basis F von V und G von W. so gilt:

a) f ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar.

b) Sei f ein Isomorphismus; dann ist A^{-1} die Matrix von $f^{-1} : W \to V$ bzgl. G und F, d. h. $\left(M_G^F(f)\right)^{-1} = M_F^G(f^{-1})$.

Beweis:

Siehe oben. □

4.44 Satz:

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{Rang}(A) = n$ *ist.*

Beweis:

Nach Satz 4.43 gilt: $A \in Gl_n(K) \;\Leftrightarrow\; f_A : K^n \to K^n$ ist ein Isomorphismus.
f_A ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ f_A surjektiv ist.
f_A ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rang}(A) = n$ nach Satz 4.23. $\square$

Algorithmus zur Inversenbestimmung

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \cdot B = E_n$. Nach der Definition der Matrizenmultiplikation gilt:

$$\text{j-te Spalte von } E_n = A\cdot \text{ j-te Spalte von } B.$$

d. h. j-te Spalte von B ist Lösung der Gleichung $Ax = e_j$.
Löse die Gleichungssysteme simultan:

$$(A|E_n) \in K^{n\times 2n}.$$

Bringe A mit Hilfe des Eliminationsverfahrens auf Stufenform. Man erhält dann:

$$(A'|B) \in K^{n\times 2n}$$

Entweder ist A' nicht E_n. Dann ist $\operatorname{Rang}(A) < n$, d. h. A ist nicht invertierbar. Oder $A' = E_n$. Nach Konstruktion ist dann $A \cdot B = E_n$ mit $B = A^{-1}$, denn $A^{-1} = A^{-1} \cdot E_n = A^{-1} \cdot A \cdot B = E_n \cdot B = B$.

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elementarmatrizen und Zeilenumformungen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entsteht aus E_3 durch Addition des r-fachen der 3. Zeile zur 1. Zeile oder durch Addition des r-fachen der 1. Spalte zur 3. Spalte

1. Linksmultiplikation einer Matrix mit P bewirkt die Zeilenumformung, durch die P aus der Einheitsmatrix entsteht:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & u \\ b & v \\ c & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + rc & u + rw \\ b & v \\ c & w \end{pmatrix}$$
2. Rechtsmultiplikation einer Matrix mit P bewirkt die Spaltenumformung, durch die P aus der Einheitsmatrix entsteht:
$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ s & t & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z + rx \\ s & t & u + rs \end{pmatrix}$$

Elementarmatrizen für die einzelnen Zeilenumformungen:

- Typ I: i-te Zeile mit $r \neq 0$ multiplizieren:
Ersetze in der i-ten Zeile der Einheitsmatrix die 1 durch r:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Typ 2: r-faches der j-ten Zeile zur i-ten Zeile addieren $(i \neq j)$:
Ersetze in der j-ten Spalte die Null in der i-ten Zeile durch r:
Beispiel: das r-fache der 3. Zeile soll zur 1. Addiert werden:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Typ 3: vertausche i-te und j-te Zeile: Ersetze auf der Diagonalen die i-te und die j-te Eins durch Null. Setze die Null an den Koordinaten (i, j) und (j, i) gleich Eins.
Beispiel: die 2. und die 4. Zeile sollen vertauscht werden.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = P$$

4.45 Lemma:

Eine Matrix $B \in K^{m\times n}$ geht genau dann aus einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ durch eine elementare Zeilenumformung hervor, wenn es eine Elementarmatrix $P \in Gl_m(K)$ gibt mit $B = P \cdot A$.

Beweis:

erfolgt leicht durch Nachrechnen. □

4.46 Satz:

B gehe aus $A \in K^{m\times n}$ durch eine Abfolge elementarer Zeilenumformungen hervor. Wendet man diese Zeilenumformungen in derselben Reihenfolge auf die Einheitsmatrix E_m an, erhält man eine invertierbare Matrix $P \in Gl_m(K)$ mit $B = P \cdot A$.

Beweis:

Nach Voraussetzung von Lemma 4.45 gilt:
Es existieren Elementarmatrizen P_i mit $B = P_k \cdot P_{k-1} \cdot \dots \cdot P_1 \cdot A$.
Aber: $P_i \in Gl_m(K)$, d. h. $P := P_k \cdot P_{k-1} \cdot \dots \cdot P_1 \in Gl_m(K)$.
$P = P \cdot E_m = P_k \cdot P_{k-1} \cdot \dots \cdot P_1 \cdot E_m$ mit $B = P \cdot A$. □

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bringe A auf Stufenform und beobachte den Effekt auf E_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{Typ II: } P_1$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{Typ II: } P_3P_2P_1$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \text{Typ I: } P_4P_3P_2P_1$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \text{Typ II: } P_6P_5P_4P_3P_2P_1 =: P.$$

Nach Satz 4.46 gilt: $P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.47 Folgerung:
Jede invertierbare Matrix läßt sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

Beweis:
$A \in GL_n(K) \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist durch Zeilenumformungen in E_n überführbar.
Da Zeilenumformugen rückgängig gemacht werden können und die Umkehrungen wieder elementare Zeilenumforumgen sind, erhält man A durch Zeilenumformungen aus E_n.
Nach Satz 4.46 gilt: $\exists\, P_i$ mit $A = P_k \cdot P_{k-1} \cdot \cdots \cdot P_1 \cdot E_n$. □

4.48 Satz:
Sei $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt: $B = P \cdot A$ mit $P \in Gl_m(K)$ genau dann, wenn B aus A durch elementare Zeilenumforumgen hervorgeht.

Beweis:
"$\Rightarrow$" Sei $P \in Gl_m(K)$. Nach Folgerung 4.47 gilt: es existieren Elementarmatrizen P_i mit $P = P_k \cdot P_{k-1} \cdot \cdots \cdot P_1$.
Nach Lemma 4.45 gilt: B geht aus A durch elementare Zeilenumformungen hervor.

"$\Leftarrow$" Gehe B aus A durch elementare Zeilenumformungen hervor.
Nach Lemma 4.45 gilt dann: $B = P_k \cdot P_{k-1} \cdot \cdots \cdot P_1 \cdot A$, wobei P_i Elementarmatrizen sind.
$\Rightarrow P := P_k \cdot P_{k-1} \cdot \cdots \cdot P_1 \in Gl_m(K)$ mit $B = P \cdot A$.
□

Bemerkung:
Zeilenumformungen ändern bekanntlich den Rang einer Matrix nicht.
Weiterer Beweis:
$\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(f_A))$, wobei $f_A : x \mapsto Ax$.
Sei $P \in Gl_m(K) \quad \Rightarrow \quad f_P : x \mapsto Px$ ist ein Isomorphismus.
$f_P\,|_{\,\mathrm{Im}(f_A)}$ ist ein Isomorphismus mit $f_P : \mathrm{Im}(f_A) \to f_P(\mathrm{Im}(f_A))$,
d. h. $\mathrm{Im}(f_P \circ f_A) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rang}(A) = \dim \mathrm{Im}(f_P \circ f_A)$. □

Analoge Theorie für Spaltenumformungen, da Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen eine Spaltenumformung bewirkt.

4.49 Satz:
Sei $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt: $B = A \cdot Q$ mit $Q \in Gl_n(K)$ genau dann, wenn B aus A durch elementare Spaltenumforumgen hervorgeht.

Beweis:
Völlig analog zu Satz 4.48 □

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Koeffizientenmatrix.
Annahmen:

1. $\mathrm{Rang}(A) = m$, d. h. die Zeilen sind linear unabhängig. (i. A. erhalte ich dies durch Weglassen überflüssiger Zeilen).

2. die ersten m Spalten sind linear unabhängig. (i. A. erhalte ich dies durch Vertauschen von Spalten).

A besitzt Stufenform (durch Reduktion) mit Buchführungsmenge $D = \{1, \dots, m\}$.
Bezeichne mit $J = \{j \mid m+1 \le j \le n\}$.
Zerlege das n-Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ in zwei Teile:
$x = (x_D, x_J)$ mit $x_D = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$ und $x_J = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in K^{n-m}$.
Analog zerlege die Matrix A in $A = (A_D, A_J)$ mit $A_D \in K^{m\times m}$ und $A_J \in K^{m\times(n-m)}$.
Dann ist: $Ax = (A_D, A_J) \cdot (x_D, x_J)^T = A_D x_D + A_J x_J$.
Wir wissen: $\mathrm{Rang}(A) = m$ und $\mathrm{Rang}(A_D) = m$. Das heißt, A_D ist invertierbar.
Reduktion von A auf Stufenform liefert eine Matrix $\tilde{A}$ und hat zur Folge, daß A_D in E_m überführt wird.
$\Rightarrow\ \exists\, P \in Gl_m(K)$ als Produkt von Elementarmatrizen mit $P \cdot A_D = E_m$, d. h. $P = A_D^{-1}$.
$\tilde{A} = A_D^{-1} \cdot A = A_D^{-1} \cdot (A_D, A_J) = (A_D^{-1} \cdot A_D, A_D^{-1} A_J) = (E_m, A_D^{-1} \cdot A_J)$.
$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A_D^{-1} \cdot Ax = A_D^{-1} b$.
Oder anders gesagt:
$A_D x_D + A_J x_J = b \quad \Leftrightarrow \quad A_D^{-1}(A_D x_D + A_J x_J) = A_D^{-1} b$
Also ist $x_D + A_D^{-1} A_J x_J = A_D^{-1} b$.
Das führt uns auf eine Lösungsformel:

$$x = (x_D, x_J) \text{ ist Lösung von } Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x_D = A_D^{-1} b - A_D^{-1} A_J x_J$$

Man sieht wiederum, daß die Komponenten von x_J, d. h. diejenigen mit einem Index $\notin D$, frei wählbar sind.
Insbesondere gilt:
Wählt man $x_J = 0$ erhält man die spezielle Lösung

$$d(0) = A_D^{-1} b$$

Wählt man $x_i = e_j \in K^{n-m}$ und $b = 0$, so erhält man mit

$$d(j) = -A_D^{-1} A_J e_j$$

die Basislösungen.

4.5 Basiswechsel

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, seien F, F' Basen von V und G, G' Basen von W.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen $M_G^F(f)$ und $M_{G'}^{F'}(f)$?
Dazu benötigt man den Basiswechsel von F nach F':
Sei also $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $F' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$.
$k_F(v) = (r_1, \ldots, r_n)^T \quad \Leftrightarrow \quad v = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i v_i.$
Was ist dann $k_F(v')$?

4.50 Definition: Basiswechselmatrix

F und F' seien Basen von V. Die ***Basiswechselmatrix*** *$P_{F'}^F$ für den Übergang von F nach F' ist diejenige Matrix, deren j-te Spalte aus den F'-Koordinaten des j-ten Basisvektors von F besteht.*
Das heißt: j-te Spalte von $P_{F'}^F = k_{F'}(v_j)$
oder:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} (P_{F'}^F)_{ij} \cdot v'_i$$

oder

$$P_{F'}^F = M_{F'}^F(\mathrm{id}_V)$$

oder:

Neue Koordinaten der alten Basisvektoren in die Spalten!

4.51 Satz:
F und F' seien Basen von V. Mit der Basiswechselmatrix $P_{F'}^F$ für den Übergang von F nach F' erhält man die F'-Koordinaten von $v \in V$ aus den F-Koordinaten von v, indem man $P_{F'}^F$ mit $k_F(v)$ multipliziert, d. h.

$$k_{F'}(v) = P_{F'}^F \cdot k_F(v)$$

Beweis:
Nach Definition 4.50 und 4.25 wissen wir, daß $P_{F'}^F = M_{F'}^F(\mathrm{id}_V)$ ist.
Satz 4.27 besagt dann: $k_{F'}(\mathrm{id}(v)) = M_{F'}^F(\mathrm{id}) \cdot k_F(v) = P_{F'}^F \cdot k_F(v)$. $\square$

Darstellung mittels kommutativem Diagramm

Übergang zur Schreibweise mit linearen Abbildungen:
$P = P_{F'}^F$ induziert eine Abbildung $f_P : K^n \to K^n : x \mapsto Px$.

Satz 4.27 besagt: $k_{F'}(v) = P_{F'}^{F} \cdot k_F(v) = f_P(k_F(v)) = (f_P \circ k_F)(v)$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "k_F"'] \arrow[dr, "k_{F'}"] & \\ K^n \arrow[rr, "f_P"'] & & K^n \end{tikzcd}$$

(kommutatives Dreieck)

4.52 Lemma:

(1) Basiswechselmatrizen sind invertierbar.
(2) Ist Q irgendeine invertierbare Matrix mit $f_Q \circ k_F = k_{F'}$, so ist Q die Basiswechselmatrix von F nach F'.

Beweis:

(1) k_F und $k_{F'}$ sind Isomorphismen. Nach Satz 4.51 gilt:
$k_{F'}(v) = P_{F'}^{F} \cdot k_F(v)$ für alle $v \in V$.
Wähle $v = k_F^{-1}(x)$ mit $x \in K^n$.
$k_{F'}(k_F^{-1}(x)) = P_{F'}^{F} \cdot k_F(k_F^{-1}(x)) = P_{F'}^{F} \cdot x$ für alle $x \in K^n$.
Das heißt: $k_{F'} \circ k_F^{-1} = f_P$. Da auf der linken Seite ein Isomorphismus steht, ist f_P auch ein Isomorphismus, d. h. P ist invertierbar.

(2) Wir haben: $f_Q \circ k_F = k_{F'}$.
$\Rightarrow$ $f_Q(k_F(v)) = k_{F'}(v)$. Wähle $v = k_F^{-1}(x), \quad x \in K^n$.
$\Rightarrow$ $f_Q(x) = k_{F'}(k_F^{-1}(x)) = f_P(x)$ für alle $x \in K^n$.
$\Rightarrow$ $f_Q = f_P$.

□

4.53 Satz:

F, F' und F'' seien Basen von V. Dann gilt:

i) Die Basiswechselmatrix für den Übergang von F nach F'' ist das Produkt der Basiswechselmatrizen für den Übergang von F' nach F'' mit der für den Übergang von F nach F'.

$$P_{F''}^{F} = P_{F''}^{F'} \cdot P_{F'}^{F}$$

ii) Die Basiswechselmatrix für den Übergang von F nach F' ist die Inverse derjenigen für den Übergang von F' nach F.

$$(P_{F'}^{F})^{-1} = P_{F}^{F'}$$

Beweis:

i) wir wissen: $P_{F'}^{F} = M_{F'}^{F}(\mathrm{id})$, $P_{F''}^{F'} = M_{F''}^{F'}(\mathrm{id})$ und $P_{F''}^{F} = M_{F''}^{F}(\mathrm{id})$.
Es gilt: $\mathrm{id}_{F \to F''} = \mathrm{id}_{F' \to F''} \circ \mathrm{id}_{F \to F'}$.
Nach Satz 4.34 gilt dann: $P_{F''}^{F} = P_{F''}^{F'} \cdot P_{F'}^{F}$.

ii) $\mathrm{id}_{F' \to F'} = \mathrm{id}_{F \to F'} \circ \mathrm{id}_{F' \to F}$.
$E_n = M_{F'}^{F'}(\mathrm{id}) = M_{F'}^{F}(\mathrm{id}) \cdot M_{F}^{F'}(\mathrm{id}) = P_{F'}^{F} \cdot P_{F}^{F'}$, d. h. $(P_{F'}^{F})^{-1} = P_{F}^{F'}$.

□

Beispiel:

Basiswechsel im $\mathbb{R}^2$. $S = \{e_1, e_2\}$ und $F = \{v_1, v_2\}$ mit $v_1 = (3,4)^T$ und $v_2 = (-1,2)^T$.

1. Übergang von $F \to S$:
$$P_S^F = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Übergang von $S \to F$:
Nach Satz 4.54 gilt:
$$P_F^S = (P_S^F)^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$
Sei $v = (s_1, s_2)^T$ ein Vektor bezüglich der Basis S. Was ist dann $k_F(v)$?
$$k_F(v) = P_F^S \cdot k_S(v) = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2s_1 + s_2 \\ -4s_1 + 3s_2 \end{pmatrix}$$
Das heißt, $v = \frac{1}{10}(2s_1 + s_2) \cdot v_1 + \frac{1}{10}(-4s_1 + 3s_2) \cdot v_2$.

$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung, F, F' seien Basen von V, und G, G' seien Basen von W.
$M = M_G^F(f)$ und $M' = M_{G'}^{F'}(f)$.
Nach Satz 4.27 gilt: $k_G(f(v)) = M \cdot k_F(v)$ und $k_{G'}(f(v)) = M' \cdot k_{F'}(v)$.
Wir haben: $P = P_F^{F'}$ und $Q = P_{G'}^G$.
Nach Satz 4.52 gilt dann für alle $v \in V$ und für alle $w \in W$:
$k_F(v) = P \cdot k_{F'}(v)$ bzw. $k_{G'}(w) = Q \cdot k_G(w)$.
$\Rightarrow\ k_G(f(v)) = M \cdot k_F(v) = M \cdot P \cdot k_{F'}(v)$
$\Rightarrow\ k_{G'}(f(v)) = Q \cdot k_G(f(v)) = Q \cdot M \cdot P \cdot k_{F'}(v)$.
$\Rightarrow\ M' = Q \cdot M \cdot P$.

4.54 Satz:

$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Für Basen F, F' von V und Basen G, G' von W entsteht die Matrix M' von f bzgl. F' und G' aus der Matrix M von f bzgl. F und G durch
$$M' = Q \cdot M \cdot P,$$
wobei P die Basiswechselmatrix für den Übergang von F' nach F und Q diejenige für den Übergang von G nach G' ist.
$$M_{G'}^{F'}(f) = M_{G'}^{G}(\mathrm{id}) \cdot M_G^F(f) \cdot M_F^{F'}(\mathrm{id})$$

Beweis:
Siehe oben. $\square$

Beispiel:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y)^T \mapsto (x-y, -2y, -2x+2y)^T$ ist eine lineare Abbildung.
S sei Standardbasis in $\mathbb{R}^2$, T die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$M_T^S(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$G = \{w_1, w_2, w_3\}$ mit $w_1 = (1,1,1)^T$, $w_2 = (0,1,1)^T$ und $w_3 = (0,0,1)^T$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^3$.
$F = \{v_1, v_2\}$ mit $v_1 = (1,1)^T$ und $v_2 = (-1,1)^T$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^2$.
Dann ist

$$P_G^T = (P_T^G)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_S^F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich für $M_G^F(f)$:

$$M_G^F(f) = P_G^T \cdot M_T^S(f) \cdot P_S^F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

4.55 Satz:
$A \in K^{m\times n}$ sei eine Matrix. A hat genau dann den Rang r, wenn es invertierbare Matrizen $P \in Gl_m(K)$ und $Q \in Gl_n(K)$ gibt mit

$$Q \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis:

"$\Leftarrow$" Sei $Q \cdot A \cdot P$ in obiger Form. Q sind Zeilenumformungen, P Spaltenumformungen.
Der Rang einer Matrix wird durch Spalten- und Zeilenumformungen nicht verändert.
Aber Rang $\left(\begin{smallmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = r$. Also ist auch Rang$(A) = r$.

"$\Rightarrow$" 1.) wir wissen: $A = M_S^S(f_A)$, wobei $f_A : x \mapsto Ax$ ist.
Rang$(A) =$ Rang$(f_A) = \dim \operatorname{Im}(f_A)$.
Im Beispiel im Paragraphen 4.3 haben wir gezeigt:
Es existiert eine Basis F von K^n und eine Basis G von K^m mit

$$M_G^F(f_A) = \left(\begin{smallmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Nach Satz 4.55 gilt dann:
$M_G^F(f_A) = P_G^S \cdot M_S^S(f_A) \cdot P_S^F = Q \cdot A \cdot P$, wobei P und Q invertierbar sind.
2.) Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen sind Zeilenumformungen, Rechtsmultiplikation entspricht Spaltenumformungen.

Durch Q wird A durch Zeilenumformungen in Stufenform gebracht.
Aber $\mathrm{Rang}(A) = r$, d.h. $D = \{j_1, \ldots, j_r\}$.
Durch Spaltenvertauschungen erhält man: $D = \{1, \ldots, r\}$, also $\left(\begin{smallmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

$\square$

Kapitel 5

Dualität

Wir haben in den vorangehenden Kapiteln zwei Standardbeispiele für Untervektorräume kennengelernt:

1. $S = \{v_1, v_k\}$ sei ein System von Vektoren.
   $L(S)$, die lineare Hülle von S, ist ein Untervektorraum, und es gilt
   $$\forall v \in L(s) \exists r_i \in K: \; v = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i$$
2. Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix, $U = L_H(A)$ sei die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.

In Kapitel 3 haben wir festgestellt:
Für alle Untervektorräume $U \subseteq K^n$ existiert eine Basis, d. h. U ist vom Typ 1).
Das Ziel von diesem Kapitel ist zu zeigen, daß U auch vom Typ 2) ist.
Die beiden Typen 1) und 2) sind in folgendem Sinne komplementär: Ist $U \subseteq K^n$ ein Untervektorraum mit $\dim U = k$, so benötigt man, wie wir zeigen werden, $n - k$ Gleichungen, um U festzulegen.

5.1 Der Dualraum

Definition:
Sei V ein K-Vektorraum. Die linearen Abbildungen $\lambda : V \to K$ heißen ***Linearformen auf V.***

Addition und Skalarmultiplikation sind punktweise definiert, d. h.

$$(\lambda + \mu)(v) = \lambda(v) + \mu(v) \quad \text{und} \quad (r\lambda)(v) = r\lambda(v).$$

$\mathcal{L}(V, K)$ ist der Raum der linearen Abbildungen von $V \to K$, also der Linearformen auf V.

5.1 Definition: Dualraum

*Sei V ein K-Vektorraum. Der **Dualraum V^*** ist der Vektorraum aller Linearformen $\mathcal{L}(V,K)$ auf V.*

Beispiel:

Sei $V = K^{n\times 1}$, d. h. der Raum der Spaltenvektoren. Sei $z = (a_1, \dots, a_n) \in K^{1\times n}$ ein Zeilenvektor.
Definiere eine Linearform λ_z durch

$$\lambda_z : K^{n\times 1} \to K : s = (s_1, \dots s_n)^T \mapsto z \cdot s = \sum a_i s_i$$

Es existiert ein Isomorphismus zwischen $K^{1\times n}$ und $\mathcal{L}(K^{n\times 1}, K)$:

$$i : K^{1\times n} \to \mathcal{L}(K^{n\times 1}, K) : z \mapsto \lambda_z$$

Sei $\lambda \in \mathcal{L}(K^{n\times 1}, K)$. Diese Linearform ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte $\lambda(e_k)$, wobei e_k die Einheitsvektoren sind.
Wähle $z = (z_1, \dots, z_n)$ mit $z_i = \lambda(e_i)$.
Es ist zu zeigen: $\lambda_z = \lambda$. Da λ durch $\lambda(e_k)$ eindeutig bestimmt ist, genügt es zu zeigen, daß $\lambda_z(e_k) = \lambda(e_k)$ ist für alle k.
$\lambda_z(e_k) = z \cdot e_k = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i (e_k)_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda(e_i) \cdot (e_k)_i = \lambda(e_k)$ für $k = 1 \dots n$.

D. h. der Dualraum des Vektorraums $K^{n\times 1}$ der Spaltenvektoren ist isomorph zum Vektorraum der Zeilenvektoren $K^{1\times n}$.

Dimension des Dualraums

Nach Satz 4.32 gilt: Aus $\dim V = n$ und $\dim W = m$ folgt, da $\mathcal{L}(V,W) \cong K^{m\times n}$ ist, $\dim \mathcal{L}(V,W) = m \cdot n$.
Also in diesem Falle: $W = K$ und $\dim V = n$. Dann gilt:

$$\dim \mathcal{L}(V,K) = \dim V^* = n = \dim V$$

Basis des Dualraums

Sei $F = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.
Definiere dann:

$$\lambda_i : V \to K : v_j \mapsto \lambda_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \qquad \text{Kronecker-Symbol}$$

Falls $v = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j v_j$ ist, gilt $\lambda_i(v) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \lambda_i(v_j) = r_i$.

5.2 Satz:
$F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von V. Die Koordinatenlinearformen $\lambda_j : V \to K$ bilden eine Basis $F' = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ des V^*.

Beweis:
$\dim V = \dim V^* = n$. Es genügt zu zeigen, daß das System linear unabhängig ist. Dann liegt ein maximales linear unabhängiges System vor, d. h. eine Basis.
Sei also $0 = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \lambda_j$.
$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \lambda_j(v) = 0 \quad \forall v \in V$.
$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \lambda_j(v_i) = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$.
$\Rightarrow r_j = 0 \quad \Rightarrow$ lineare Unabhängigkeit. $\square$

Aus der Definition der λ_i erhält man folgende Darstellungen:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) \cdot v_i$$

Beweis: sei $v = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i v_i$. Dann ist $\lambda_j(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \lambda_j(v_i) = r_j$.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda(v_i) \cdot \lambda_i$$

Beweis: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda(v_i) \cdot \lambda_i(v_j) = \lambda(v_j)$.

Beispiele:

1. $V = K^{n \times 1}$ sei der Raum der Spaltenvektoren mit der Standardbasis $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)^T$, wobei die 1 an der i-ten Stelle steht.
   Dann ist $V^* = K^{1 \times n}$ der Raum der Zeilenvektoren, und es sei $e'_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$, wobei die 1 wieder an der i-ten Stelle steht..
   Die zu $\{e_1, \ldots, e_n)$ duale Basis in V^* ist $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, denn $e'_i(e_j) = e'_i \cdot e_j = \delta_{ij}$.

2. Zusammenhang zwischen Basiswechsel in V und V^*:
   Betrachte $V = \mathbb{R}^2$ mit der Basis $S = \{e_1, e_2\}$ und der Basis $F = \{v_1, v_2\}$ mit $v_1 = (1, 2)^T$ und $v_2 = (3, 4)^T$. Es gilt also: $e_1 = \frac{1}{2}(-4v_1 + 2v_2)$ und

$e_2 = \frac{1}{2}(3v_1 - v_2)$.
Basiswechsel von S nach F: Wie man aus obigen Darstellungen von e_1 und e_2 abliest gilt:

$$P_S^F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_F^S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Übertragung auf den Dualraum:
Seien $F' = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ und $S' = \{e'_1, e'_2\}$ die dualen Basen zu F bzw. S in V^* mit $\lambda_j(v_i) = \delta_{ij}$ und $e'_i(e_j) = \delta_{ij}$.
Sei $\lambda \in V^*$, d. h. $\lambda = \alpha_1 \cdot \lambda_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2$
Andererseits ist aber $\lambda_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_1(e_i) \cdot e'_i = \lambda_1(\frac{1}{2}(-4v_1 + 2v_2))e'_1 + \lambda_1(\frac{1}{2}(3v_1 - v_2))e'_2 = \frac{1}{2}(-4e'_1 + 3e'_2)$.
Ebenso ist $\lambda_2 = \frac{1}{2}(2e'_1 - e'_2)$. Also gilt für die Basiswechselmatrix

$$P_{S'}^{F'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Das heißt, man erhält $P_{S'}^{F'}$ aus P_F^S, indem man in P_S^F die i-te Zeile zur i-ten Spalte macht.

5.3 Definition:

transponierte Matrix

Sei $M \in K^{m \times n}$. Die ***transponierte Matrix*** *M^T ist gegeben durch:*

j-te Spalte von M^T ist die j-te Zeile von M

Oder: Für $M = (a_{ij})$ und $M^T = (b_{ij})$ gilt $a_{ij} = b_{ji}$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{S'}^{F'} = (P_F^S)^T = \left((P_S^F)^{-1}\right)^T$$

5.4 Satz:

F und G seien Basen eines Vektorraumes V und $P = P_G^F$ sei die Basiswechselmatrix von F nach G. Die Basiswechselmatrix $P' = P_{G'}^{F'}$ für den Übergang der dualen Basis F' (zu F) zur dualen Basis G' (zu G) erfüllt die Gleichung

$$P' = (P^{-1})^T$$

Beweis:

Sei $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $G = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Es sei $w_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} v_k$, d. h. $A := P_F^G = (a_{ij})$.
Nach Satz 4.54 ist $A = P^{-1}$.
Sei $F' = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ und $G' = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$.
$\lambda_j = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}\, \mu_i$.
Nach der Darstellungsformel gilt dann:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j(w_i)\mu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k\Big) \cdot \mu_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\lambda_j(v_k)\mu i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, \mu_i$$

Damit ist gezeigt: $a_{ji} = b_{ij}$, also $P' = (P^{-1})^T$. $\square$

5.2 Dualitätstheorie

Jetzt wollen wir Untervektorräume $U \subseteq V$ durch Gleichungen beschreiben.

5.5 Definition: Annihilator
Sei U ein Untervektorraum von V. Der **Annihilator** *(Annulator) von U ist die Menge aller $\lambda \in V^*$ mit $\lambda(u) = 0$ für alle $u \in U$.*

$$U' = \{\lambda \in V^* \mid U \subseteq \operatorname{Ker} \lambda\}$$

- U' ist ein Untervektorraum von V^*.
  Beweis: $0 \in U'$, denn $\operatorname{Ker}(0) = V$.
  Seien $\lambda, \mu \in U'$. Dann gilt für alle $u \in U$:
  $(\lambda + \mu)(u) = \lambda(u) + \mu(u) = 0 + 0 = 0$ und $(r \cdot \lambda)(u) = r \cdot \lambda(u) = r \cdot 0 = 0$.

- Inklusionen kehren sich um:

  $$U \subseteq W \quad \Rightarrow \quad W' \subseteq U'$$

  Insbesondere gilt: $\{0\}' = V^*$ und $V' = \{0\}$.
  Beweis: Sei $\lambda \in W' \quad \Rightarrow \quad \lambda(w) = 0\ \forall\, w \in W$.
  $\Rightarrow \quad \lambda(w) = 0\ \forall\, w \in U \quad \Rightarrow \quad \lambda \in U'$.

5.6 Satz:
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. $U \subseteq V$ sei ein Untervektorraum mit der Basis $G = \{v_1, \ldots, v_k\}$. $F = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von V. Dann gilt:

a) Die Koordinatenlinearformen $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ (bzgl F) bilden eine Basis des Annihilators U' von U.

b) $\dim U + \dim U' = \dim V$.

<u>Beweis:</u>

a) Für $\lambda_j,\ j \geq k+1$ gilt nach Definition: $\lambda_j(v_i) = 0,\ i = 1 \dots k$.
$\Rightarrow\ \lambda_j \in U'$ für $j = k+1 \dots n$.
Da $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ eine Basis von V^* ist, sind $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ linear unabhängig.
Es bleibt also zu zeigen, daß $\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ ein erzeugendes System ist.
Dazu sei $\lambda \in U'$.
Da $\lambda \in V^*$ ist, existieren r_j mit $\lambda = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \lambda_j$.
Es ist aber $\lambda(v_i) = 0\ \forall\, i = 1 \dots k$.
$\Rightarrow\ 0 = \lambda(v_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \lambda_j(v_i) = r_i \quad \forall\, i = 1 \dots k$.
$\lambda = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \lambda_j = \sum\limits_{j=k+1}^{n} r_j \lambda_j$

b) Folgt unmittelbar aus a).

$\square$

Definition:

$$\operatorname{codim} U := \dim U' = \dim V - \dim U$$

5.7 Satz:

U sei ein Untervektorraum eines n-dimensionalen Vektorraumes V. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ seien Linearformen auf V. Dann gilt:

$$U = \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{Ker} \lambda_j \quad \Leftrightarrow \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \text{ erzeugen } U'$$

<u>Beweis:</u>

Der Beweis wird in drei Schritten geführt:

1. Zu zeigen: $U = \bigcap_{\lambda \in U'} \operatorname{Ker} \lambda$.

"$\subset$" Nach Definition von U' gilt: $U \subseteq \operatorname{Ker} \lambda \quad \forall\, \lambda \in U'$.

"$\supset$" Allgemein gilt: $A \subset B:\ x \in A\ \Rightarrow\ x \in B \quad \Leftrightarrow \quad x \notin B\ \Rightarrow\ x \notin A$.
Sei $v \notin U$. Es ist also zu zeigen: $v \notin \bigcap_{\lambda \in U'} \operatorname{Ker} \lambda$. Dazu genügt es zu zeigen: $\exists\, \lambda \in U':\ \lambda(v) \neq 0$.
Sei $G = \{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von U. Da $v \notin U$ ist, gilt: $G_1 = \{v_1, \dots, v_k, v\}$ ist linear unabhängig.
Ergänze G_1 zu einer Basis von V: $F = \{v_1, \dots, v_k, v = v_{k+1}, v_{k+2} \dots, n\}$.
Bilde hierzu die duale Basis $F' = \{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n\}$

Dabei gilt: $\tilde{\lambda}_j(v_i) = \delta_{ij}$. $\tilde{\lambda}_{k+1}(v_{k+1}) = \tilde{\lambda}_{k+1}(v) \neq 0$.
Andererseits gilt: $\tilde{\lambda}_{k+1}(v_j) = 0$ für $j = 1 \dots k$.
$\Rightarrow \;\; \tilde{\lambda}_{k+1} \in U'$, aber $\tilde{\lambda}_{k+1}(v) \neq 0$.

2. Zu zeigen: $W = L(\mu_1, \dots, \mu_r)$ sei ein Untervektorraum von V^*. Dann gilt: $\bigcap_{\lambda \in W} \operatorname{Ker} \lambda = \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} \mu_j$.

"$\subset$" Sei $u \in \bigcap_{\lambda \in W} \operatorname{Ker} \lambda$. Dann gilt für alle $\lambda \in W$: $\lambda(u) = 0$.
$\Rightarrow \;\; \mu_j(u) = 0$ für $j = 1 \dots r \quad \Rightarrow \quad u \in \operatorname{Ker} \mu_j$ für $j = 1 \dots r$.
$\Rightarrow \;\; u \in \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} \mu_j$.
"$\supset$" Sei $u \in \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} \mu_j$.
$\Rightarrow \;\; \mu_j(u) = 0$ für $j = 1 \dots r$.
Sei $\lambda \in W$ beliebig. Dann gibt es r_j mit $\lambda = \sum r_j \mu_j$.
$\lambda(u) = \sum r_j \mu_j(u) = 0$.
$\Rightarrow \;\; \lambda(u) = 0$ für alle $\lambda \in W$.

3. Jetzt wird die Aussage des Satzes gezeigt.

"$\Leftarrow$" Sei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ein erzeugendes System von U'.
Dann gilt nach 1.): $U = \bigcap_{\lambda \in U'} \operatorname{Ker} \lambda = \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{Ker} \lambda_j$.
"$\Rightarrow$" Sei $U = \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{Ker} \lambda_j$.
Dann gilt: $U \subseteq \operatorname{Ker} \lambda_j$ für alle $j = 1 \dots m$.
Gegebenenfalls durch Umnumerierung können wir annehmen, daß $L(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = L(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ist, wobei die $\lambda_1 \dots \lambda_r$ linear unabhängig sind.
Sei $W = L(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \subseteq U'$. $\quad \Rightarrow \quad \dim W \leq \dim U'$.
Wir wollen zeigen, daß $r = \dim U$, d. h. $W = U'$ ist.
$U = \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{Ker} \lambda_j = \bigcap_{\lambda \in W} \operatorname{Ker} \lambda = \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} \lambda_j$.
$f : V \to K^r : v \mapsto \big(\lambda_1(v), \dots, \lambda_r(v)\big)$.
$\operatorname{Ker} f = \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} \lambda_j = U$.
Nach der Rangformel gilt:
$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \leq \dim U + r \leq \dim U + \dim U' = \dim V = n$.
$\Rightarrow$ Überall steht "$=$", d. h. $r = \dim U'$. Also ist $W = U'$.

$\square$

Zusammenfassung:

V sei ein Vektorraum, $\dim V < \infty$.
$U \subseteq V$ sei ein Untervektorraum mit $\dim U = k$.

a) Beschreibung durch "Parameter":
$\Rightarrow$ arbeiten mit erzeugenden Systemen von U.
$\Rightarrow$ Minimalzahl der Parameter $= \dim U = k$.

b) Beschreibung durch "Gleichungen":
$\Rightarrow$ arbeiten mit erzeugenden Systemen von U'.
$\Rightarrow$ Minimalzahl von Gleichungen $= \dim U' = \operatorname{codim} U = n - k$.

Beispiel:

Wir betrachten einen affinen Unterraum A des $\mathbb{R}^5$ mit $A = p + U$, wobei gilt: $p = (-2, 1, 1, 2, 3)^T$ und $U = L(v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = (-1, 1, 0, 2, 4)^T$, $v_2 = (-1, 3, -2, 10, 6)^T$ und $v_3 = (1, 0, -1, 2, -3)^T$.

a) Beschreibung durch Parameter:
$\dim U \leq 3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 10 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 12 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\dim U = 2$. Setze: $u_1 = (1, 0, -1, 2, -3)^T$ und $u_2 = (0, 1, -1, 4, 1)^T$.
Damit ergibt sich $A = \{p + su_1 + ru_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

b) Beschreibung durch Gleichungen:
$\dim U = 2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{codim} U = 5 - 2 = 3$. Es sind also 3 Gleichungen nötig.
Wir suchen eine Basis des Annihilators U'.
u_1 und u_2 bilden eine Basis von U. Wir ergänzen sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ und wählen dazu $u_3 = e_3$, $u_4 = e_4$ und $u_5 = e_5$.
Dann bilden die Koordinatenlinearformen $\lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5$ bzgl. der Basis $F = \{u_1, \ldots, u_5\}$ eine Basis von U'.
Z. B. ist λ_3 dadurch charakterisiert, daß $\lambda_3(u_i) = \delta_{3i}$ ist für $i = 1 \ldots 5$.
Wir wissen: $\lambda_3(v) = \sum\limits_{i=1}^{5} s_i v_i$, wobei $v = (v_1, \ldots, v_5)^T$ ist.
Entsprechendes gilt für $\lambda_4(v)$ und $\lambda_5(v)$.
Dadurch erhält man 3 Gleichungssysteme à 5 Gleichungen; löse sie simultan:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das heißt: $\lambda_3 = (1, 1, 1, 0, 0)$, $\lambda_4 = (-2, -4, 0, 1, 0)$ und $\lambda_5 = (3, -1, 0, 0, 1)$.
Also bilden $\lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5$ eine Basis von U'.
Nach Satz 5.7 gilt dann: $v \in U \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_3(v) = \lambda_4(v) = \lambda_5(v) = 0$, d. h. $v \in L_H(B)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$y \in A \ \Leftrightarrow \ y = p + u$ mit $u \in U$.
Wir wissen: $\lambda_3(y) = \lambda_3(p) + \lambda_3(u) = \lambda_3(p)$. Analog gilt: $\lambda_4(y) = \lambda_4(p)$ und $\lambda_5(y) = \lambda_5(p)$.
Also ist y eine Lösung von $By = \begin{pmatrix} \lambda_3(p) \\ \lambda_4(p) \\ \lambda_5(p) \end{pmatrix}$.

Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V, sei $U' \subseteq V^*$, d. h. $U \leftarrow U'$.
Sei $W \subseteq V^*$ ein Untervektorraum von V^*, sei $W^{\#} \subseteq V$ mit

$$W^{\#} = \bigcap_{\lambda \in W} \operatorname{Ker} \lambda$$

Im Schritt 1) vom Beweis von Satz 5.7 wurde gezeigt:

$$U = \bigcap_{\lambda \in U'} \operatorname{Ker} \lambda = (U')^{\#}$$

5.8 Definition:

Bidualraum

*Unter dem **Bidualraum** eines Vektorraumes V versteht man den Dualraum V^{**} von V^*.*
Das heißt: Elemente von V^{**} sind Linearformen auf V^*.

Wir definieren:

$$\beta_v : V^* \to K : \lambda \mapsto \lambda(v)$$

β_v ist linear: z. B. $\beta_v(\lambda + \mu) = (\lambda + \mu)(v) = \lambda(v) + \mu(v) = \beta_v(\lambda) + \beta_v(\mu)$.
$\Rightarrow \ \forall v \in V: \ \beta_v \in V^{**}$, d. h.

$$\beta : V \to V^{**} : v \mapsto \beta_v$$

5.9 Satz:

V sei ein endlichdimensionaler Vektorraum. Die Abbildung $\beta : V \to V^{**}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis:

- β ist linear:
  $\beta_{v+w}(\lambda) = \lambda(v + w) = \lambda(v) + \lambda(w) = \beta_v(\lambda) + \beta_w(\lambda)$.
  Analog: $\beta_{rv} = r \cdot \beta_v$.
- Nach Definition ist $V^{**} = \mathcal{L}(V^*, K)$.
  Wir wissen aber: $V^* = \mathcal{L}(V, K)$. Insbesondere gilt nach Satz 4.32: $\dim V^* = \dim V$.
  Analog gilt dann $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$.
- Es reicht zu zeigen: $\operatorname{Ker} \beta = \{0\}$.
  Sei $v \neq 0$, aber $v \in \operatorname{Ker} \beta$. Daraus folgt: $\beta_v = 0$, d. h. $\lambda(v) = 0$. $\beta_v(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in V^*$.
  Das heißt, für alle $\lambda \in V^*$ gilt: $\lambda(v) = 0$.
  Aber $v \neq 0$. Nach dem Basisergänzungssatz gibt es eine Basis $F = \{v, v_2, \ldots, v_n\}$ von V.
  Bildet man die Koordinatenlinearformen, so gilt: $\lambda_1(v) = 1$ und $\lambda_i(v) = 0$ für $i = 2 \ldots n$.
  Widerspruch! Also ist $v = 0$.

$\square$

Bemerkungen:

1. $\dim V = \infty$; i. A. ist β injektiv.

2. $\dim V < \infty$.
   a) $V \cong V^*$, aber basisabhängig (vgl. Satz 4.32).
   b) $V \cong V^{**}$, aber basisunabhängig (vgl. Satz 5.9).

   Deshalb werden V und V^{**} identifiziert.

Seien $W \subseteq V^*$ und $W^\# \subseteq V$ Untervektorräume. Dann gilt:

$$\begin{aligned} W^\# := \bigcap_{\lambda \in W} \operatorname{Ker} \lambda &= \{v \in V \mid \lambda(v) = 0 \ \forall \lambda \in W\} \\ &= \{\beta_v \in V^{**} \mid \beta_v(\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in W\} \\ &= W' \subseteq V^{**} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$W = U' \text{ und } U \subseteq V \quad \Rightarrow \quad (U')^\# = U'' = \bigcap_{\lambda \in U'} \operatorname{Ker} \lambda = U$$

Also ist $U'' = U$.

5.10 Satz: (Dualitätssatz)
V sei ein endlichdimensionaler Vektorraum. Mit $\mathcal{A}$ bezeichnen wir die Menge aller Untervektorräume von V und mit $\mathcal{A}^*$ die Menge aller Untervektorräume von V^*.
Der Übergang zum Annihilator liefert eine Abbildung

$$\Delta_V : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^* : U \mapsto U'$$

mit folgenden Eigenschaften:

1.) Δ_V *ist bijektiv mit der Umkehrabbildung*

$$\Delta_V^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A} : W \mapsto W'$$

2.) Δ_V *ist inklusionsumkehrend, d. h.*

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Leftrightarrow \quad U_1' \supseteq U_2'$$

3.) Δ_V *vertauscht Summen und Durchschnitte:*
$(U_1 + U_2)' = U_1' \cap U_2'$
$(U_1 \cap U_2)' = U_1' + U_2'$

4.) Es gilt die Annihilator-Dimensionsformel

$$\dim U + \dim U' = \dim V$$

Beweis:

1.) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.
$\Delta_V^* \circ \Delta_V(U) = \Delta_V^*(U') = U'' = U = \mathrm{id}_V(U)$. $\Rightarrow$ $\Delta_V^* \circ \Delta_V = \mathrm{id}\, V$
Analoge Überlegungen für V^* statt V ergeben: $\Delta_V \circ \Delta_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$.
$\Rightarrow$ Δ_V ist bijektiv. Δ_v und Δ_V^* sind Umkehrabbildungen.

2.) Schon bekannt: $U_2 \subseteq U_1 \quad \Rightarrow \quad U_1' \subseteq U_2'$.
Ebenso gilt dann: $U_1' \subseteq U_2' \quad \Rightarrow \quad U_2'' \subseteq U_1''$, d. h. $U_2 \subseteq U_1$.

3.) Sei $\lambda \in V^*$.
λ annuliert $U_1 + U_2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda$ annuliert sowohl U_1 als auch U_2.
Sei $u \in U_1 + U_2$. $\Rightarrow$ $u = u_1 + u_2$.
Es ist $0 = \lambda(u) = \lambda(u_1) + \lambda(u_2)$ und $0 \in U_1 + U_2$.
Sei $u_1 = 0$, d. h. $0 = \lambda(u) = \lambda(u_2)$ und umgekehrt.
Also ist $(U_1 + U_2)' = U_1' \cap U_2'$.
Es gilt also: $(U_1' + U_2')' = U_1'' \cap U_2'' = U_1 \cap U_2$.
Wende darauf Δ_V an:
$U_1' + U_2' = (U_1' + U_2')'' = (U_1 \cap U_2)'$.

4.) siehe Satz 5.6

$\square$

5.3 Transponierte Abbildungen

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\mu : W \to K$ eine Linearform auf W.
Dann ist $\mu \circ f : V \to K$ eine Linearform auf V.

5.11 Definition:

Transponierte Abbildung

*Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Die **Transponierte** von f ist die durch*

$$f^T : W^* \to V^* : \mu \mapsto \mu \circ f$$

gegebene Abbildung zwischen den Dualräumen.

$$(f^T(\mu))(v) = (\mu \circ f)(v) = \mu(f(v)) \qquad \forall\, \mu \in W^*,\ v \in V$$

5.12 Satz:

$g : U \to V$ und $f : V \to W$ seien lineare Abbildungen. Die Transponierte des Kompositums $f \circ g : U \to W$ ist gegeben durch:

$$(f \circ g)^T = g^T \circ f^T$$

Beweis:

Sei $\mu \in W^*$.
$(f \circ g)^T(\mu) = \mu \circ f \circ g = (f^T(\mu)) \circ g = g^T(f^T(\mu)) = (g^T \circ f^T)(\mu)$. $\square$

5.13 Folgerung:
$f : V \to W$ sei ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $g : W \to V$. Dann ist $f^T : W^* \to V^*$ ein Isomorphismus und die Umkehrabbildung ist g^T.

Beweis:
Wir haben gegeben: $f \circ g = \mathrm{id}_W$ und $g \circ f = \mathrm{id}_V$.
Nach Satz 5.12 gilt: $g^T \circ f^T = (\mathrm{id}_W)^T = \mathrm{id}_{W^*}$
Wir wissen: $(\mathrm{id}_W)^T(\mu) = \mu \circ \mathrm{id}_W = \mu$
Analog: $f^T \circ g^T = (\mathrm{id}_V)^T = \mathrm{id}_{V^*}$. □

5.14 Satz:
$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Ist M die Matrix von f bzgl. den Basen F von V und G von W, so ist die transponierte Matrix M^T die Matrix von f^T bezüglich der dualen Basen G' von W^* und F' von V^*.

Beweis:
Sei $F = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $G = \{w_1, \dots, w_m\}$.
$M = M_G^F(f) = (a_{ij})$.
$f(v_j) = \sum\limits_i a_{ij} w_i$.
Seien $F' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ und $G' = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ die dualen Basen.
Dann ist $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$ und $\mu_i(w_j) = \delta_{ij}$.
Wir wollen $f^T(\mu_j)$ mit Hilfe von λ_i darstellen. Wir benutzen dazu die Darstellungsformel:

$$\lambda = \sum_i \lambda(v_i)\lambda_i \quad \text{für } \lambda = f^T(\mu_j) = \mu_j \circ f$$

$$\begin{aligned}
f^T(\mu_j) &= \mu_j \circ f = \sum_i (\mu_j \circ f)(v_i)\lambda_i \\
&= \sum_i \mu_j(f(v_i))\lambda_i = \sum_i \mu_j\Big(\sum_k (a_{ki} w_k\Big)\lambda_i \\
&= \sum_i \sum_k a_{ki}\mu_j(w_k)\lambda_i = \sum_i a_{ji}\lambda_i = \sum_i (M^T)_{ij}\lambda_j \\
&= F'\text{-Koordinaten von } f^T(\mu_j), \text{ d.h. } M_{F'}^{G'} = M^T
\end{aligned}$$

□

Spezialfall:
Sei $A \in K^{m\times n}$. $f_A : K^m \to K^n : x \mapsto Ax$, d.h. $A = M_S^S(f_A)$.
K^n und K^m sind Räume von Spaltenvektoren. Dann sind $(K^n)^*$ und $(K^m)^*$ Räume von Zeilenvektoren.
Wir identifizieren jetzt $(K^n)^* \cong K^n$ und $(K^m)^* \cong K^m$.
Dann erhalten wir nach Satz 5.14: $f_A^T : K^m \to K^n : y \mapsto A^T y$.

Insbesondere liefert Satz 5.12 folgendes:
Wir wissen: Sei $M_S^S(f_A) = A$ und $M_S^S(f_B) = B$.
Dann ist $M_S^S(f \circ g) = A \cdot B$.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \tag{5.15}$$

5.16 Satz:
V und W seien endlichdimensionale Vektorräume, und $f : V \to W$ sei linear. Mit der Identifizierung $V \cong V^{**}$ und $W \cong W^{**}$ erhält man auch $f^{TT} = f$.

Beweis:
Sei $M = M_G^F(f)$, F sei eine Basis von V und G eine Basis von W. Wir wissen bereits, daß mit Hilfe der Identifizierung $V \cong V^{**}$ $F'' = F$ die duale Basis der dualen Basis F' ist. Analog gilt: $W \cong W^{**}$ und $G'' = G$ ist die duale Basis der dualen Basis G'.
Nach Satz 5.14 gilt: $M^{TT} = M_{G''}^{F''}(f^{TT}) = M_G^F(f^{TT})$.
Aber $M^{TT} = M$, also auch $f^{TT} = f$. □

5.17 Satz:
$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Es gilt:
a) $\mathrm{Ker}(f^T) =$ *Annihilator von* $\mathrm{Im}(f)$
b) $\mathrm{Im}(f^T) =$ *Annihilator von* $\mathrm{Ker}(f)$

Beweis:
a)

$$\begin{aligned} \mu \in \mathrm{Ker}\, f^T \quad &\Leftrightarrow \quad f^T(\mu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mu \circ f = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mu(f(v)) = 0 \quad \forall\, v \in V \\ &\Leftrightarrow \quad \mu(w) = 0 \quad \forall\, w \in \mathrm{Im}\, f \\ &\Leftrightarrow \quad \mu \in (\mathrm{Im}(f))' \end{aligned}$$

b) $V \cong V^{**}$, $W \cong W^{**}$ und $f \cong f^{TT}$
$(\mathrm{Im}(f^T))' = \mathrm{Ker}(f^{TT}) = \mathrm{Ker}(f)$
Wende Annihilator an:
$\mathrm{Im}\, f^T = (\mathrm{Im}(f^T))'' = (\mathrm{Ker}(f^{TT}))' = (\mathrm{Ker}\, f)'$.

□

5.18 Folgerung:
Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume. Es gilt für jede lineare Abbildung $f : V \to W$:

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Im}\, f^T), \ \textit{d. h.}\ \mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f^T)$$

Beweis:
$f^T : W^* \to V^*$. Es gilt die Dimensionsformel:

$$\dim(\operatorname{Im} f^T) + \dim(\operatorname{Ker} f^T) = \dim W^*$$

Nach Satz 5.17 folgt: $\operatorname{Ker}(f^T) = (\operatorname{Im}(f))'$
Nach Satz 5.6 gilt: $\dim(\operatorname{Ker} f^T) = \dim W - \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W^* - \dim(\operatorname{Im} f)$
$\dim(\operatorname{Im} f^T) + \dim W^* - \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W^*$. □

Bemerkungen:

1. $\operatorname{Im} f \subseteq W$, $\operatorname{Im}(f^T) \subseteq V^*$.
2. Begrifflicher Beweis von “Zeilenrang = Spaltenrang”:
   Spaltenrang von $A = \dim U_S(A) = \dim(\operatorname{Im} f_A) = \operatorname{Rang}(f_A)$
   Zeilenrang von $A = \dim U_Z(A) = \dim U_S(A^T) = \dim(\operatorname{Im}(f_A^T) = \operatorname{Rang}(f_A^T)$
   Mit Folgerung 5.18 folgt die Behauptung.

5.19 Folgerung:

Sei $\dim V < \infty$ *und sei* $f : V \to V$ *ein Endomorphismus. Dann gilt:*

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Ker} f^T)$$

Beweis:
Rangformel für f und f^T:

$$\dim(\operatorname{Im} f^T) + \dim(\operatorname{Ker} f^T) = \dim V^* = \dim V = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$$

Daraus folgt die Beh. □

5.20 Folgerung:

Seien $\dim V,\ \dim W < \infty$. *Für jede lineare Abbildung* $f : V \to W$ *gilt:*
a) f *ist surjektiv* $\Leftrightarrow$ f^T *ist injektiv*
b) f *ist injektiv* $\Leftrightarrow$ f^T *ist surjektiv*

Beweis:
a) Nach Satz 5.17 gilt: $\operatorname{Ker}(f^T) = (\operatorname{Im} f)'$.
   Aus der Charakterisierung des Annihilators folgt:
   $\operatorname{Ker}(f^T) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(f) = W$.
b) Satz 5.17 liefert: $\operatorname{Im}(f^t) = (\operatorname{Ker} f)'$.
   Also ist $\operatorname{Im}(f^T) = V^* \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

□

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme:

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Koeffizientenmatrix. Sei $f_A : x \mapsto Ax$. Dann gilt:

i. $L_H(A) = \mathrm{Ker}(f_A)$

ii. $U_S(A) = \mathrm{Im}(f_A)$

iii. $U_Z(A) = U_S(A^T) = \mathrm{Im}(f_A^T) = (\mathrm{Ker}(f_A))'$, d. h. $\boldsymbol{U_Z(A) = (L_H(A))'}$

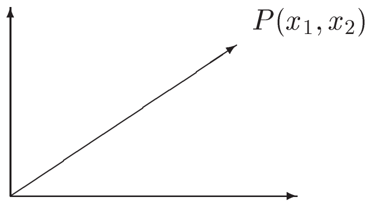
5.21 Satz:
Sei $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$. Es gilt die folgende Alternative:
Entweder ist $Ax = b$ lösbar oder $A^T y = 0$ und $b^T y = 1$ besitzen Lösungen.

Beweis:
$f_A : K^n \to K^m$, $f_A^T : K^M \to K^n$.
$Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{Im}(f_A) = (\mathrm{Ker}(f_A^T))'$.
$Ax = b$ nicht lösbar $\Leftrightarrow$ $b \notin (\mathrm{Ker}(f_A^T))'$.
$b \notin (\mathrm{Ker}(f_A^T))' \;\Rightarrow\; \exists\, \mu \in \mathrm{Ker}(f_A^T) :\; \mu(b) \neq 0$
Skaliere μ derart, daß $\tilde{\mu}(b) = 1$, aber:
$\tilde{\mu}(b) = b^t \mu = 1$.
$\tilde{\mu} \in \mathrm{Ker}(f_A^T) \quad \Rightarrow \quad f_A^T(\tilde{\mu}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^T \tilde{\mu} = 0$. D. h. $Ax = b$ ist nicht lösbar
$\Leftrightarrow \quad \exists\, y$ mit $A^T y = 0$ und $b^T y = 1$. $\square$

Kapitel 6

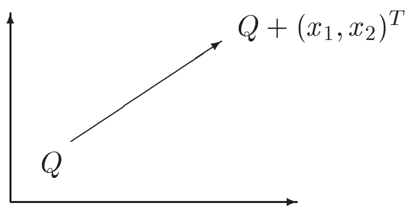
Vektorräume mit Skalarprodukt

6.1 Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$



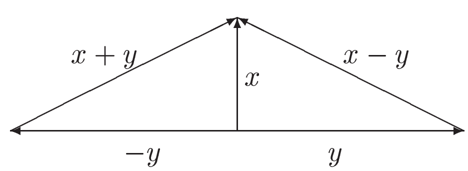
$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} =$ Abstand vom Nullpunkt

Die Vektorstruktur von $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die Translationen:



Translation $\cong$ Vektor
$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = l\big((x_1, x_2)^T\big)$

x und y senkrecht zueinander:



Gleichschenkliges Dreieck

$$\begin{aligned} \text{Länge}^2 &= (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 \\ &= (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 = x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad 2x_1y_1 + 2x_2y_2 = -2x_1y_1 - 2x_2y_2$
$\Rightarrow \quad x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$

Schreibweise:

$$\langle x,y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2$$

Damit ergibt sich für die Länge eines Vektors: $l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Eigenschaften von $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

i) bilinear, d. h.

$$\langle rx+sy,z\rangle = r\cdot\langle x,z\rangle + s\cdot\langle y,z\rangle$$
$$\langle z,rx+sy\rangle = r\cdot\langle z,x\rangle + s\cdot\langle z,y\rangle$$

ii) symmetrisch, d. h.

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$$

iii) positiv definit, d. h.

$$\langle x,x\rangle \le 0 \quad \text{und} \quad \langle x,x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

<u>Beweis:</u>

i)

$$\begin{aligned}\langle rx+sy,z\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} rx_1+sy_1 \\ rx_2+sy_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}\right\rangle \\ &= r(x_1z_1+x_2z_2) + s(y_1z_1+y_2z_2) \\ &= r\ \langle x,z\rangle + s\ \langle y,z\rangle\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie folgt:

$$\begin{aligned}\langle z,rx+sy\rangle &= \langle rx+sy,z\rangle = r\ \langle x,z\rangle + syz \\ &= r\ \langle z,x\rangle + s\ \langle z,y\rangle\end{aligned}$$

iii) $\langle x,x\rangle = x_1^2 + x_2^2 >= 0.$

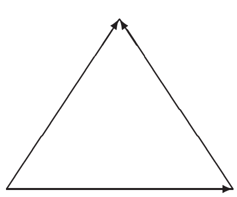
$\langle x,x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = 0 \ \wedge\ x_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

$\square$

Definition:

- $x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \langle x,y\rangle = 0$
- $\|x\| = \textit{Länge von } x = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Satz des Pythagoras:

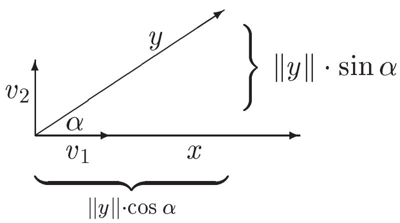


$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \underbrace{2\ \langle x,y\rangle}_{=0} + \|y\|^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Lineae Abhängigkeit:

- x, y linear abhängig:
  z. B. $x = r \cdot y$. Dann ist
  $\langle x, y \rangle = \langle ry, y \rangle = r \langle y, y \rangle = r \cdot \|y\|^2$.
  $\langle x, x \rangle = r^2 \langle y, y \rangle = r^2 \cdot \|y\|^2$.
  $\Rightarrow \ \|x\| = r \cdot \|y\|$
  Also ist $\langle x, y \rangle = r \cdot \|y\| \cdot \|y\| = \pm \|x\| \cdot \|y\|$.
- x, y linear unabhängig:



$\|v_1\| = \|v_2\| = 1 \quad \text{und} \quad v_1 \perp v_2$

Aus der Schule bekannt:

$$y = \|y\| \cdot \cos\alpha \cdot v_1 + \|y\| \cdot \sin\alpha \cdot v_2$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, \|y\| \cdot \cos\alpha \cdot v_1 + \|y\| \cdot \sin\alpha \cdot v_2 \rangle \\ &= \|y\| \cdot \cos\alpha \cdot \underbrace{\langle x, v_1 \rangle}_{\|x\| \cdot \langle v_1, v_1 \rangle} + \|y\| \cdot \sin\alpha \cdot \underbrace{\langle x, v_2 \rangle}_{=0} \\ &= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Der Fall $\mathbb{R}^3$

Es wird definiert:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle = 0$$

Eine affine Ebene kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\} = p + U$$

$$\begin{aligned} x \in U \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \langle a, x \rangle = 0 \quad \text{mit } a = (a_1, a_2, a_3)^T \end{aligned}$$

$$E = p + U = p + \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \perp a\}$$

6.1 Definition: Skalarprodukt

Sei V ein reeller Vektorraum. Ein ***Skalarprodukt*** *ist eine Abbildung von $V \times V \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$, so daß gilt:*

i) Die Abbildung ist bilinear, *d. h. für alle $x,y,z \in V$ und alle $r,s \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\langle rx+sy,z\rangle = r\cdot\langle x,z\rangle + s\cdot\langle y,z\rangle$$
$$\langle z,rx+sy\rangle = r\cdot\langle z,x\rangle + s\cdot\langle z,y\rangle$$

ii) Die Abbildung ist symmetrisch, *d. h. für alle $x,y \in V$ gilt:*

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$$

iii) Die Abbildung ist positiv definit, *d. h. für alle $x \in V$ gilt:*

$$\langle x,x\rangle \geq 0 \qquad \textit{und} \qquad \langle x,x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

Bemerkung:

Bilinear bedeutet:

Ist $y \in V$ fest, dann ist die Abbildung: $\langle \cdot, y\rangle : x \mapsto \langle x,y\rangle$ linear und
ist $x \in V$ fest, so ist die Abbildung: $\langle x, \cdot\rangle : y \mapsto \langle x,y\rangle$ linear.

Eine solche Abbildung geht nicht für alle Körper $K \neq \mathbb{R}$. Ist V ein reeller Vektorraum, so ist ein Skalarprodukt eine bilineare, symmetrische, positiv definite Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$.

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$:
$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
2. F sei eine Basis von V.
$$\Phi_F : V \times V \to \mathbb{R} : \Phi(x,y) = \langle k_F(x), k_F(y)\rangle$$
3. $\varphi([a,b])$ sei die Menge der stetigen Funktionen auf $[a,b]$.
$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

6.2 Definition:

V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die ***Norm*** *eines Vektors ist definiert als* Norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Zwei Vektoren $x,y \in V$ sind ***orthogonal*** *genau dann, wenn $\langle x,y\rangle = 0$, d. h. $x \perp y$.* orthogonal

Ist $\|x\| = 1$, so ist x ein ***Einheitsvektor****.* Einheitsvektor

Bemerkung:

- $e_i \in \mathbb{R}^n$ seien die Vektoren der Standardbasis. Es gilt: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, d. h. $\|e_i\| = 1$. Also sind die e_i paarweise orthogonale Einheitsvektoren.
- Satz von Pythagoras:
  Es ist $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \perp y$$

6.3 Satz: (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt:

$$|\,\langle x, y\rangle\,| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Beweis:

1. x und y sind linear abhängig, o. B. d. A. $x = ry$.
   $\|x\|^2 = \langle ry, ry\rangle = r^2\|y\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| = |r| \cdot \|y\|$.
   $|\,\langle x, y\rangle\,| = |r| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$.
2. x und y linear unabhängig, d. h. $x + ry \neq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
   Also ist $0 < \|x + ry\|^2$ (sonst wäre $\|x + ry\| = 0$, also $x + ry = 0$).
   $$\begin{aligned} 0 < \|x+ry\|^2 &= \langle x+ry, x+ry\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, ry\rangle + \langle ry, x\rangle + r^2 \cdot \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\,\langle x, ry\rangle = r^2\|y\|^2 \end{aligned}$$
   Da die obige Ungleichung für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt, setze $r_0 = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$.
   $\Rightarrow \qquad 0 < \|x\|^2 - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} \cdot \langle x, y\rangle + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2} \cdot \|x\|^2$
   Durch Kürzen erhält man:
   $$0 < \|x\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}$$
   Insbesondere ist $\|y\| \neq 0$, da sonst x und y linear abhängig wären.
   $\Rightarrow \qquad \langle x, y\rangle^2 < \|x\|^2\|y\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\,\langle x, y\rangle\,| < \|x\| \cdot \|y\|$.

$\square$

Bemerkung:

i) Gegeben sei $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
   Sei $y = (1, 1, 1, \ldots, 1)^T$. Dann folgt aus $|\,\langle x, y\rangle\,| \leq \|x\| \cdot \|y\|$:
   $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n}$, also
   $$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
   arithmetisches Mittel $\leq$ quadratisches Mittel

ii) Gegeben sei der Raum $\varphi([a,b])$ der stetigen Funktionen auf $[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \langle f,g\rangle \leq \|f\|\cdot\|g\| = \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

iii) Dreiecksungleichung:
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+2\,\langle x,y\rangle+\|y\|^2 \leq \|x\|^2+2\cdot\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2.$

$$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

Die Dreiecksungleichung gilt für alle Skalarprodukte!

6.4 Satz: (Eigenschaften der Norm)
Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt:

1. $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ *(positiv definit)*
2. *Für alle $r \geq 0$ gilt:* $\|rx\| = r\cdot\|x\|$
3. *Für alle $x,y \in V$ gilt:* $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

6.4b Definition:
V sei ein reeller Vektorraum.

1. *Hat V ein Skalarprodukt, so nennt man V auch einen **euklidischen Vektorraum**.*
2. *Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften 1) bis 3) aus* 6.4 *heißt **Norm**.*
3. *Hat V eine Norm, so nennt man V einen **normierten Vektorraum**.*

Zusammenfassung:

euklidischer Vektorraum
$\downarrow$
normierter Vektorraum
$\downarrow$
$\mathbb{R}$-Vektorraum

Aber: Nicht jeder normierte Vektorraum ist ein euklidischer Vektorraum!

6.2 Orthogonale Zerlegungen

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V mit $\langle v, v_j \rangle = \delta_{ij}$.
Seien $x, y \in V$, d. h. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ und $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i v_i$.

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

6.5 Definition:
V sei ein euklidischer Vektorraum. $U \subseteq V$ sei ein Untervektorraum. Dann sei

$$\begin{aligned}U^{\perp} &:= \{x \in V \mid x \perp u \ \forall u \in U\} \\ &= \{x \in V \mid \langle x, u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}\end{aligned}$$

Bemerkung:

* $U^{\perp} = \bigcap\limits_{u \in U} \{x \in V \mid \langle x, u \rangle = 0\} = \bigcap\limits_{u \in U} \operatorname{Ker}(x \mapsto \langle x, u \rangle)$,
  das heißt, $U^{\perp}$ ist der Durchschnitt von Untervektorräumen und somit wieder ein Untervektorraum.
* Seien $u_1, u_2 \in U^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \langle u_1, u \rangle = 0 \quad \wedge \quad \langle u_2, u \rangle = 0$.
  $\Rightarrow \quad \langle u_1 + u_2, u \rangle = 0$
  $\Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in U^{\perp}$.
  Analog für ru_1.

Beispiel:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $U = L\Big(\{(1,2,3,4)^T, \ (1,1,1,1)^T\}\Big)$
$v \in U^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall\, u \in U$.
Sei $u \in U$, dann ist $u = \sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i u_i$.
$\langle v, u \rangle = \langle v, \sum \alpha_i u_i \rangle = \sum \alpha_i \, \langle v, u_i \rangle$.
Also: $U = L\big(\{u_1, \dots, u_n\}\big) \subseteq V$.

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, u_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1 \dots n\}$$

In unserem Beispiel gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad v \in U^{\perp}$$

$\Rightarrow \quad U^{\perp} = L\Big(\{(1,-2,1,0)^T, \ (2,-3,0,1)^T\}\Big)$.

6.6 Satz:

V sei ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:

$$U \oplus U^\perp = V$$

<u>Beweis:</u>

i. z.z.: $U \cap U^\perp = \{0\}$, d.h. Summe ist direkt.
   Sei $u \in U \cap U^\perp \quad \Rightarrow \quad \langle u, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$

ii. z.z.: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.
   Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von U.
   Sei $f : V \to \mathbb{R}^k : v \mapsto \big(\langle u_1, v\rangle\ , \langle u_2, v\rangle\ , \ldots, \langle u_k, v\rangle\big)^T$. Dann ist f linear.
   $U \cap U^\perp = \{0\}$. Also ist $v \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; \langle u_j, v\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; v \in U^\perp$.
   $U \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
   $f|U$ ist injektiv.
   Außerdem gilt: $\dim \mathrm{Im}(f) \geq \dim \mathrm{Im}(f|U) = \dim(f(U)) = \dim U = k$.
   $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim(\mathbb{R}^k) = k \quad \Rightarrow \quad \dim \mathrm{Im}(f) = k$.
   $\dim U^\perp = \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V - \dim U$. Daraus folgt die Behauptung.
   Dies ist ausreichend, da $U \oplus U^\perp \subseteq V$.

□

6.7 Folgerung:

V sei ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ sei ein Untervektorraum. Dann gilt:

$$U \cap U^\perp = \{0\}$$
$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

<u>Beweis:</u>

Folgt direkt aus Satz 6.6 □

6.8 Folgerung:

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V < \infty$. So gilt:

a) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist

$$U^{\perp\perp} = U$$

b) Seien U, W Untervektorräume. Dann gilt:

$$U \subseteq W \qquad \Leftrightarrow \qquad W^\perp \subseteq U^\perp$$

c) Seien U, $W \subseteq V$ Untervektorräume. Dann ist:

$$(U \cup W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$$
$$(U \cap W)^\perp = U^\perp \cup W^\perp$$

Beweis:

a) $w \in U^{\perp\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \langle w, v\rangle = 0 \;\forall\, v \in U^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad w \in U.$

b) "$\Rightarrow$" Sei $v \in W^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \langle v, w\rangle = 0 \;\forall w \in W.$
$\Rightarrow \quad \langle v, u\rangle = 0 \;\forall\, u \in U \quad \Rightarrow \quad v \in U^{\perp}.$
"$\Leftarrow$" $W^{\perp} \subseteq U^{\perp} \quad \Rightarrow \quad U^{\perp\perp} \subseteq W^{\perp\perp} \quad \Rightarrow \quad U \subseteq W.$

c) Übungsaufgabe!

□

6.9 Satz:
V sei ein euklidischer Vektorraum. Zu jeder Linearform $\lambda : V \to \mathbb{R}$ existiert ein eindeutiges Element $u \in V$, so daß gilt:

$$\lambda(v) = \langle u, v\rangle \qquad \forall\, v \in V$$

Beweis:

a) Eindeutigkeit:
Sei λ eine Linearform mit $\lambda(v) = \langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle \quad \forall\, v \in V.$
$\Rightarrow \;\; \langle u_1 - u_2, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in V$
$\Rightarrow \;\; u_1 - u_2 \in V^{\perp} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2.$

b) Existenz:
Falls $\lambda = 0$, wähle $u = 0$, da $\langle 0, v\rangle = 0$.
Falls $\lambda \neq 0$, gilt:
$\dim \mathrm{Im}(\lambda) \geq 1$ und $\dim \mathrm{Im}(\lambda) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$, d. h. $\dim \mathrm{Im}(\lambda) = 1$.
$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\lambda$ ist eine Hyperebene, d. h. $\dim \mathrm{Ker}(\lambda) = \dim V - 1$.
Setze $H := \mathrm{Ker}\,\lambda$
$\Rightarrow \;\; V = H \oplus H^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \dim H^{\perp} = \dim V - \dim H = 1.$
Sei $u_0 \in H^{\perp}$ mit $\|u_0\| = 1$.
Sei $u = \lambda(u_0) \cdot u_0$.
$\Rightarrow \;\; \langle u, v\rangle = \lambda(u_0) \cdot \langle u_0, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in H$
$\forall v \in H$ gilt: $v \in \mathrm{Ker}\,\lambda$, d. h. $\lambda(v) = 0$.
Wir haben also schon bewiesen: $\langle u, \cdot\rangle\,|_H = \lambda|_H$.
Da $V = H \oplus H^{\perp}$ ist, genügt es zu zeigen: $\langle u, v\rangle = \lambda(v) \quad \forall\, v \in H^{\perp}$.
$H^{\perp} = \{r \cdot u_0 \mid r \in \mathbb{R}\}$.
$\langle u, ru_0\rangle = \langle \lambda(u_0) \cdot u_0, ru_0\rangle = \lambda(u_0) \cdot r \cdot \langle u_0, u_0\rangle = \lambda(u_0) \cdot r = \lambda(ru_0).$

□

6.10 Folgerung:
Sei V ein euklidischer Vektorraum. Für jedes $u \in V$ sei die Abbildung d definiert durch

$$d(u) : v \mapsto \langle u, v\rangle$$

Dann ist die Abbildung $d : V \to V^*$ ein Isomorphismus (von Vektorräumen).

Beweis:
d ist linear, bijektiv nach 6.9. □

Bemerkungen:

1. Der Isomorphismus $d : V \to V^*$ liefert eine Interpretation des Annihilators, nämlich:
$$d(U^\perp) = U'$$
wobei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum ist.
Sei $\lambda = d(w) \in V^*$, $w \in V$.
$$\begin{aligned} \lambda \in U' \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda(u) = 0 \quad \forall\, u \in U \\ &\Leftrightarrow \quad \langle u, w\rangle = 0 \quad \forall\, u \in U \quad \text{nach Def. von } d \\ &\Leftrightarrow \quad w \in U^\perp \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in d(U^\perp) \end{aligned}$$

2. affine Unterräume: $E = p + U$:
Sei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von $U^\perp$.
Setze $b_i := \langle p, v_i\rangle$ für $i = 1 \ldots k$.
Dann gilt:
$$x \in E \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, v_i\rangle = b_i \qquad \text{für } i = 1 \ldots k$$
Beweis:
"$\Rightarrow$" $x \in E \quad \Leftrightarrow \quad x = p + u$ mit $u \in U$.
$\Rightarrow\ \langle x, v_i\rangle = \langle p, v_i\rangle + \langle u, v_i\rangle = b_i$
"$\Leftarrow$" Sei $\langle x, v_i\rangle = b_i$ für $i = 1 \ldots k$.
$\Rightarrow\ \langle x - p, v_i\rangle = b_i - \langle p, v_i\rangle = b_i - b_i = 0$
$\Rightarrow\ x - p \in U^{\perp\perp} = U$.

3. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum eines euklidischen Vektorraumes V. Dann ist
$$V = U \oplus U^\perp$$
$\forall\, v \in V\ \exists!\, v = u + w$ mit $u \in U, w \in U^\perp$.
$$P_U : V \to V : v = u + w \mapsto u$$
d. h. P_U ordnet jedem $v \in V$ die „U-Komponente“ zu. P_U heißt **orthogonale Projektion** von V auf U.
$$P_U(v) = u \quad \Leftrightarrow \quad u \in U \ \wedge\ u - v \in U^\perp \tag{6.11}$$

Beispiel:
Sei $\dim U = 1$, sei $e \in U$ und $\|e\| = 1$. Dann ist $P_U = \langle v, e\rangle \cdot e$.

Beweis: $\langle v, e\rangle \cdot e \in U$.
$\langle v - \langle v, e\rangle, e\rangle = \langle v, e\rangle - \langle v, e\rangle \cdot \langle e, e\rangle = 0$. Aus (6.11) folgt die Behauptung.

6.12 Satz:
V sei ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterverktorraum. Die orthogonale Projektion $P_U : V \to V$ ist eine lineare Abbildung mit:

a) $P_U(v) = v \quad \Leftrightarrow \quad v \in U$

b) $P_U(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \in U^\perp$.

Beweis:
Die Aussagen a) und b) folgen direkt aus 6.11. Es bleibt also nur zu zeigen, daß P_U linear ist.
Sei $v_1 = u_1 + w_1,\ v_2 = u_2 + w_2$, wobei $u_1,\ u_2 \in U$ und $w_1,\ w_1 \in U^\perp$ sind.
$rv_1 + sv_2 = ru_1 + rw_1 + su_2 + sw_2 = \underbrace{ru_1 + su_2}_{\in U} + \underbrace{rw_1 + sw_2}_{\in U^\perp}$.
$\Rightarrow\ P_U(rv_1 + sv_2) = ru_1 + su_2 = r \cdot P_U(v_1) + s \cdot P_U(v_2)$. □

Analog gilt für die Projektion $P_{U^\perp}$ auf $U^\perp$:

$$P_{U^\perp}(v) = w \quad \Leftrightarrow \quad v = u + w,\ w \in U^\perp,\ v - w \in U$$

Damit ergibt sich:

$$v = P_U(v) + P_{U^\perp}(v)$$

6.13 Satz:
V sei ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterverktorraum und $v \in V$ sei ein fest gewählter Vektor. Für alle $u \in U$ gilt:

$$\|v - P_U(v)\| \leq \|v - u\|$$

Beweis:
Sei $u \in U$. Dann ist:
$v - u = \underbrace{v - P_U(v)}_{\in U^\perp} + \underbrace{P_U(v) - u}_{\in U}$.
$\Rightarrow$ beide Teile sind orthogonal zueinander.
Nach Pythagoras gilt dann:
$\|v - u\|^2 = \|v - P_U(v)\|^2 + \|P_U(v) - u\|^2$.
$\Rightarrow\ \|v - u\| \geq \|v - P_U(v)\|$.
Gleichheit in obiger Ungleichung gilt genau dann, wenn $u = P_U(v)$. □

6.14 Definition: orthogonales System
*V sei ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Man nennt ein System von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ein **orthogonales System**, wenn die v_i von Null verschieden und paarweise orthogonal sind. Ein Orthogonalsystem von Einheitsvektoren heißt **Orthonormalsystem*** Orthonormalsystem

Bemerkungen:

- $\{v_1, \dots, v_m\}$ ist Orthonormalsystem (ON-System) $\Leftrightarrow \ \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.
- Sei $\{u_1, \dots, u_m\}$ ein Orthogonalsystem. Dann ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ mit $v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ ein Orthonormalsystem.
- Sei $F = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Sei

$$\Phi_F(u, v) = \langle k_F(u), k_F(w) \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i$$

  falls $u = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ und $w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$ Dann ist

$$\Phi_F(v_i, v_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

  d. h. F ist bezüglich Φ_F ein Orthonormalsystem.

6.15 Lemma:
Orthogonalsysteme sind linear unabhängig.

Beweis:
Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ ein Orthogonalsystem. Sei $0 = \sum_{i=1}^{m} t_i v_i$.
$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{m} t_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} t_i \ \langle v_i, v_j \rangle = t_j \|v_j\|^2$.
Da $\|v_j\|^2 \neq 0$ ist, folgt: $t_j = 0$.

□

Bemerkungen:

- Eine **Orthonormalbasis** ist eine Basis, die ein Orthonormalsystem ist.
- Aus Lemma 6.15 folgt: Ein ON-System S ist genau dann eine Basis, wenn die Anzahl der Elemente $= \dim V$ ist.
- Sei $F = \{v_1, \dots, v_m\}$ eine Orthonormalbasis. Sei $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$

  $\Rightarrow \ \langle v, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i \ \langle v_i, v_j \rangle = x_j$,
  d. h. $\langle v, v_j \rangle$ ist die j-te F-Koordinate von v. Also gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, v_i \rangle \ v_i \tag{6.16}$$

- Sei $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ und $w = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i v_i$.
  $\langle v, w\rangle = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{m} x_i v_i, \sum\limits_{i=1}^{m} y_i v_i \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i y_j \ \langle v_i, v_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i.$

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \sum_{i=1}^{m} \langle v, v_i\rangle \cdot \langle w, v_i\rangle \\ \|v\|^2 &= \sum_{i=1}^{m} \langle v, v_i\rangle^{\,2} \end{aligned} \tag{6.17}$$

- $d : V \to V^*$ ist ein Isomorphismus mit $d(u) : v \mapsto \langle u, v\rangle$.
  Sei $F = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine ON-Basis.
  $d(u_i)(u_j) = \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, d. h. $F' = \{d(u_1), \ldots, d(u_n)\}$ ist die duale Basis zu F.

6.18 Satz:
V sei ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Ist $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Orthonormalbasis von U, so gilt:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle \ u_i$$

Beweis:
$u := \sum\limits_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle \ u_i \ \in U$, da $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von U ist.
Es ist zu zeigen, daß $v - u \in U^{\perp}$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle v - u, u_j\rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle \ u_i, u_j \right\rangle \\ &= \langle v, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle \ \langle u_i, u_j\rangle \\ &= \langle v, u_j\rangle - \langle v, u_j\rangle = 0 \end{aligned}$$

□

6.19 Satz:
V sei ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Jedes Orthonormalsystem in V läßt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.

Beweis:
$\{v_1, \ldots, v_k\}$ sei ein ON-System. Sei $U = L(\{v_1, \ldots, v_k\})$.
Fall 1: $U = V$ Dann sind wir bereits fertig.

Fall 2: $U \neq V$. Dann ist $V = U \oplus U^\perp$ mit $U^\perp \neq \{0\}$.
Sei $v_{k+1} \in U^\perp$ mit $\|v_{k+1}\| = 1$.
$\Rightarrow$ $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ ist ein ON-System.
Das Verfahren bricht nach $\dim V - k$ Schritten ab. $\square$

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt

Sei $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ ein linear unabhängiges System.
Gesucht ist ein ON-System $S' = \{u'_1, \ldots, u'_m\}$ mit $L(u_1, \ldots, u_k) = L(u'_1, \ldots, u'_k)$ für $k = 1 \ldots, m$.

Wir setzen: $U_k = L(u_1, \ldots, u_k)$ und $P_k = P_{U_k}$.
1. Schritt : Setze

$$u'_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

k. Schritt $(k \geq 2)$:

Sei $\{u'_1, \ldots, u'_{k-1}\}$ ein ON-System mit $L(u_1, \ldots, u'_l) = U_l$ für $l = 1 \ldots k-1$.
$v_k = \underbrace{u_k}_{\in U_k} - \underbrace{P_{k-1}(u_k)}_{\in U_{k-1}} \in U_{k-1}^\perp \cap U_k$.
Setze also:

$$u'_k = \frac{v_k}{\|v_k\|} \quad \text{mit} \quad v_k = u_k - P_{k-1}(u_k)$$

Dann ist das System $\{u'_1, \ldots, u'_k\}$ ein ON-System.

6.20 Satz:

V sei ein euklidischer Vektorraum. Zu jedem linear unabhängigen System $\{u_1, \ldots, u_m\}$ in V gibt es ein Orthonormalsystem $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ mit

$$L(u_1, \ldots, u_k) = L(u'_1, \ldots, u'_k\} \qquad \textit{für } k = 1 \ldots m$$

<u>Beweis:</u>
Siehe oben. $\square$

Bemerkungen:

- Falls $F = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von V ist, liefert das Verfahren eine ON-Basis von V.
- Gelte $L(u_1, \ldots, u_n) = L(u'_1, \ldots, u'_n)$. Dann ist:

  $u'_1 = c_{11}u_1 \qquad u_1 = d_{11}u'_1$
  $u'_2 = c_{12}u_1 + c_{22}u_2 \qquad u_2 = d_{12}u'_1 + d_{22}u'_2$
  $\ldots \qquad \ldots$

  Die Basiswechselmatrizen $P_F^{F'}$ und $P_{F'}^F$ enthalten nur Einträge oberhalb der Diagonalen. Solche Matrizen heißen obere Dreiecksmatrizen.

Beispiel:

Gegeben sei der $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, sei $S = \{u_1, u_2, u_2\}$ mit $u_1 = (1, -1, 0)^T$, $u_2 = (3, 1, 1)^T$ und $u_3 = (2, 0, 5)^T$.

- $\|u_1\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad u_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$.
- Berechne $P_1(u_2) = \langle u_2, u_1' \rangle\; u_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot (1, -1, 0)^T = (1, -1, 0)^T$.
  $u_2' = \frac{u_2 - P_1(u_2)}{\|u_2 - P_1(u_2)\|} = \frac{(2,2,1)^T}{3} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T$.
- $P_2(u_3) = \langle u_3, u_1' \rangle\; u_1' + \langle u_2, u_2' \rangle\; u_2' = (3, 1, 1)^T$.
  $u_3' = \frac{u_3 - P_2(u_3)}{\|u_3 - P_2(u_3)\|} = \frac{(-1,-1,4)^T}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}}(-1, -1, 4)^T$.

6.3 Orthogonale Gruppe

6.21 Definition: orthogonal

*Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt **orthogonal**, wenn für alle $u,\ v \in V$ gilt:*

$$\langle f(u), f(v) \rangle \;=\; \langle u, v \rangle$$

d. h. insbesondere gilt:

$$f(u) \perp f(v) \quad \Leftrightarrow \quad u \perp v$$

$$\|f(u)\| = \|u\| \qquad \forall\, u \in V$$

*Abbildungen heißen **isometrisch**, wenn sie die Länge der Vektoren erhalten, also wenn $\|f(u)\| = \|u\|$ ist.*

Weiterhin gilt: Isometrische Abbildungen sind injektiv.

Beispiele:

1. $\mathrm{id} : V \to V$ ist orthogonal
2. Sei $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine ON-Basis und k_F die Koordinatenabbildung. Dann ist
   $$\Phi_F(u, v) \;=\; \langle k_f(u), k_F(v) \rangle$$
   orthogonal.
3. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V, $U \neq V$.
   Dann gilt für alle $v \in V:\;\; v = P_U(v) + P_{U^\perp}(v)$.
   Wir setzen:
   $$S_U(v) := P_U(v) - P_{U^\perp}(v)$$
   S_U heißt **Spiegelung** am Untervektorraum U. Falls $U = \{0\}$, dann ist $S_U(v) = -v$.

Beh.: S_U ist orthogonal.
Bew.: S_U ist linear, da Linearkombination von linearen Abbildungen.

$$\begin{aligned}\langle S_U(v), S_U(w)\rangle &= \langle P_U(v) - P_{U^\perp}(v), P_U(w) - P_{U^\perp}(w)\rangle \\ &= \langle P_U(v), P_U(w)\rangle + \langle P_{U^\perp}(v), P_{U^\perp}(w)\rangle \\ &= \langle v, w\rangle \ .\end{aligned}$$

4. $g : V \to V : v \mapsto 2 \cdot v$ ist nicht orthogonal, hat aber die Eigenschaft:

$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad g(u) \perp g(v)$$

aber g ist nicht isometrisch, da $\|g(u)\| = 2 \cdot \|u\|$.

6.22 Satz:
Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine ON-Basis von V und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. f ist genau dann orthogonal, wenn $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ ein ON-System in W ist.

Beweis:
"$\Rightarrow$" Sei f orthogonal, d. h. $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.
"$\Leftarrow$" Sei $f : V \to W$ linear, sei $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ ein ON-System.
Sei $u = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ und $v = \sum_{j=1}^{n} s_j v_j$.

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(v)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} r_i f(v_i), \sum_{j=1}^{n} s_j f(v_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_i s_j \ \langle f(v_i), f(v_j)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i s_i = \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

Also ist f orthogonal.

□

Spezialfälle:
Sei $f : V \to V$ linear und orthogonal. Dann gilt:

- $\mathrm{id} : V \to V$ ist orthogonal.
- Ist $f : V \to V$ orthogonal, so ist f auch injektiv. Falls $\dim V < \infty$ ist, ist f surjektiv, also bijektiv. Das bedeutet, f^{-1} existiert und es gilt:

$$\left\langle f^{-1}(v), f^{-1}(w)\right\rangle = \left\langle f \circ f^{-1}(v), f \circ f^{-1}(w)\right\rangle = \langle v, w\rangle$$

Also ist auch f^{-1} orthogonal.

- Sind $f, g : V \to V$ orthogonal, so ist auch $f \circ g$ orthogonal.
  Bew.: $\langle (f \circ g)(v), (f \circ g)(w) \rangle = \langle g(v), g(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.
- Komposition ist assoziativ.

6.23 Satz:

Die orthogonalen Abbildungen eines endlichdimensionalen Vektorraums in sich selbst bilden eine Gruppe bezüglich der durch Komposition definierten Multiplikation.
Diese Gruppe heißt ***Orthogonale Gruppe*** *von V. Sie wird mit $O(V)$ bezeichnet. $O(V)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$, d. h. der Abbildungen $f : V \to V$, die Isomorphismen sind.*

Beweis:
Siehe oben. □

Sei $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine ON-Basis, sei $f : V \to V$ orthogonal. Dann ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ eine ON-Basis.
Sei $A = M_F^F(f)$. Die Spalten von A enthalten dann die F-Koordinaten von $f(v_i)$. $k_F(f(v_i))$ sind die Spalten von A, aber $k_F : V \to \mathbb{R}^n$ ist orthogonal, d. h. $k_F(f(v_i))$ ist eine ON-Basis im $\mathbb{R}^n$.
Das Skalarprodukt von der i-ten und k-ten Spalte von A ist gleich 1, falls $i = k$ und 0, falls $i \neq k$. Aber die i-te Spalte von A ist die i-te Zeile von A^T, d. h. man kann das Skalarprodukt ausdrücken als

$$A^T \cdot A = E_n \qquad (+)$$

Sei $A \in R^{n \times n}$, so daß $A^T \cdot A = E_n$. Dann existiert ein $f : V \to V$ mit $A = M_F^F(f)$.
$(+)$ besagt: Die Spalten von A sind eine ON-Basis in $\mathbb{R}^n$.
Nach Satz 6.22 gilt dann (auf k_F angewendet): $f(v_i)$ ist eine ON-Basis von V.
Daraus folgt nach S. 6.22 (auf f angewendet): f ist orthogonal.

6.24 Definition:

orthogonale Matrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt ***orthogonal****, wenn $A^T \cdot A = E_n$.*

Insbesondere sind orthogonale Matrizen invertierbar mit

$$A^{-1} = A^T$$

Weiterhin gilt

$$A \cdot A^T = E_n$$

und

$$\begin{aligned} A \text{ ist orthogonal} &\Leftrightarrow \text{Spalten von } A \text{ bilden eine ON-Basis} \\ &\Leftrightarrow \text{Zeilen von } A \text{ sind eine ON-Basis} \end{aligned}$$

6.25 Satz:
Sei $F = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine ON-Basis von V und $f : V \to V$ eine lineare Abbilung. Sei A die Matrix von f bezüglich F. Dann gilt:

$$f \text{ ist orthogonal } \Leftrightarrow \ A \text{ ist orthogonal}$$

Beweis:
Sei $A = (a_{ij}) = M_F^F(f)$.

$$\begin{aligned}
\langle f(v_i), f(v_i) \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} v_k, \sum_{l=1}^n a_{lj} v_l \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} a_{lj} \ \langle v_k, v_l \rangle \\
&= \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} a_{kj}
\end{aligned}$$

i-te Komponente der j-ten Spalte von $A^T \cdot A$.
$A^T \cdot A = E_n \ \Leftrightarrow \ \left\langle f(v_i), f_(v_j) \right\rangle = \delta_{ij}$. □

Falls F keine ON-Basis ist, muß die Matrix einer orthogonalen Abbildung nicht notwendig orthogonal sein.

6.26 Folgerung:
Die orthogonalen $n \times n$-Matrizen bilden eine Gruppe.

Beweis:
Nach Satz 6.25 gilt: f orthogonal $\Leftrightarrow$ A orthogonal.
Nach Satz 6.23 bilden die orthogonalen Abbildungen eine Gruppe
und $M_F^F : \mathcal{L}(V, V) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist ein Isomorphismus von K-Algebren. □

Diese Gruppe heißt **orthogonale Gruppe in n Dimensionen**.
Bezeichnung: $O_n(\mathbb{R})$. Sie ist eine Untergruppe von $Gl_n(\mathbb{R})$.

6.27 Lemma:
Alle Basiswechselmatrizen zwischen Orthonormalbasen sind orthogonale Matrizen.

Beweis:
$F = \{v_1, \dots, v_n\}$, $F' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ seien ON-Basen.
Die i-te Spalte der Basiswechselmatrix $P_{F'}^F$ ist $k_{F'}(v_i)$.
Betrachte $f : V \to V : v_i' \mapsto v_i$ orthogonal.
Darstellungsmatrix von f: die i-te Spalte ist $k_{F'}(f(v_i')) = k_{F'}(v_i)$, d. h. beide Matrizen sind identisch, aber die Darstellungsmatrix ist orthogonal. □

Spezialfall: $\dim V = 2$
Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 = 1,\; c^2 + d^2 = 1,\; ac + bd = 0$$

Fallunterscheidung liefert:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\;(+) \;\text{ oder } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\;(-)$$

mit $a^2 + b^2 = 1$.
Die Matrizen vom Typ (+) mit $\det A = 1$ heißen **eigentliche orthogonale Matrizen** .

- E_2 ist eigentlich.
- $A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ist eigentlich.
- Seien $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ eigentlich.
  Dann ist auch $A' \cdot A' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - a'b \\ a'b + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix} = A' \cdot A$ eigentlich.

Die eigenlich orthogonalen Matrizen bilden folglich eine kommmutative Gruppe.
Sie wird bezeichnet mit $\boldsymbol{SO_2(\mathbb{R}^2)}$ oder mit $\boldsymbol{O^+(2)}$.
Die Matrizen vom Typ (−) bildet keine Gruppe ($E_2 \notin (-)$).
Die orthogonale Gruppe $O_2(\mathbb{R})$ ist nicht kommutativ:

$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$J \cdot A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot J = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

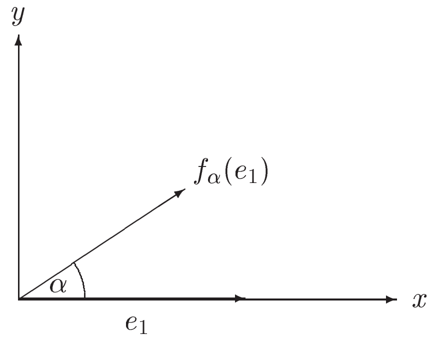
Geometrische Interpretation:

- $\forall\, \alpha \in [0, 2\pi) : D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$
- Sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}) \qquad \Rightarrow \qquad a^2 + b^2 = 1$
  $\Rightarrow\;\; \exists!\, \alpha :\; a = \cos\alpha,\; b = \sin a$, d. h. $D(\alpha) = A$.
- Betrachte den $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt.

  $$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto D(\alpha) \cdot v$$

  Sei $\|v\| = 1$, d. h. v läßt sich schreiben als $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$. Dann ist

  $$f_\alpha(v) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha \\ \cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \varphi) \\ \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix}$$



Eigentlich orthogonale Matrizen bewirken Drehungen!

$*$ Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

$\exists!\, \alpha \in [0, 2\pi)$ mit $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Sei $v_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

Es ist also $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ und $v_1 \perp v_2$

$Av_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = v_1$

$Av_2 = \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = -v_2$.

$\Rightarrow$ bewirkt Spiegelung!

Zusammenfassung:

- Elemente aus $SO_2(\mathbb{R})$ sind Drehungen.
- Elemente aus $O^-(\mathbb{R})$ sind Spiegelungen.

Kapitel 7

Polynomringe, Restklassenstrukturen

7.1 Polynomringe

$1 + 2x^2 + x^4$ und $3 + 4x^7$ sind beides Polynome.
Allgemeiner: K sei ein Körper. Ausdrücke der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

heißen Polynome in der Unbekannten X. Die a_i heißen Koeffizienten.
Addition und Multiplikation werden wie folgt definiert:
Seien $p = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ und $q = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i X^i$ Polynome. Dann ist

$$p + q := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i$$

und

$$p \cdot q := \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j+k=i} a_j b_k \right) X^i$$

Das Polynom $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ kann auch als unendliches Tupel $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ aufgefaßt werden. Dann ergibt sich für Addition und Multiplikation folgendes:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$$

und

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots)$$

d. h. der i-te Eintrag lautet $\sum\limits_{j+k=i} a_j b_k$.

7.1 Definition:

Polynom

*Ein **Polynom** mit Koeffizienten in K ist eine Abbildung $p : \mathbb{N} \to K$ mit $p(i) = 0$ für alle hinreichend große i. Hierfür sind folgende Operationen erklärt:*

a) Skalarmultiplikation: Für Polynome p und $a \in K$ setzt man

$$ap : \mathbb{N} \to K : i \mapsto a \cdot p(i)$$

b) Addition: Seien $p,\ q$ Polynome. Dann ist

$$p + q : \mathbb{N} \to K : i \mapsto p(i) + q(i)$$

c) Multiplikation: Seien $p,\ q$ Polynome. Das Produkt ist erklärt als

$$p \cdot q : \mathbb{N} \to K : i \mapsto \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

Die so erklärten Operationen liefern wieder Polynome.
Skalarmultiplikation und Addition sind nichts anderes als die punktweise definierten Operationen auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$.
$\Rightarrow$ Die Polynome bilden einen Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$.

7.2 Lemma:

Die Multiplikation von Polynomen ist assoziativ, distributiv und kommutativ, d. h. für alle Polynome $f,\ g,\ h$ gilt:

a) $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

b) $f \cdot (g + h) = fg + fh$

c) $fg = gf$

Beweis:

a) Assoziativität:

$$\begin{aligned}
((f \cdot g) \cdot h)(i) &= \sum_{r+s=i} (f \cdot g)(r) \cdot h(s) \\
&= \sum_{r+s=i} \sum_{j+k=r} f(j)g(k)h(s) = \sum_{j+k+s=i} f(j)g(k)h(s) \\
(f \cdot (g \cdot h))(i) &= \sum_{j+r=i} f(j) \cdot (g \cdot h)(r) \\
&= \sum_{j+r=i} \sum_{k+s=r} f(j)g(k)(h(s) = \sum_{j+k+s=i} f(j)g(k)h(s)
\end{aligned}$$

b)c) Analog.

$\square$

- Multiplikation besitzt ein Einselement:

$$e_0(i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man sieht sofort, daß gilt: $e_0 \cdot f = f \cdot e_0 = f$.
Damit bilden die Polynome einen **kommutativen Ring**.

- Für alle $a \in K$ setze $f_a := a \cdot e_0$.
  Die Zuordnung $a \mapsto f_a$ ist injektiv.
  Mit f_a läßt sich wie mit Körperelementen rechnen:
  $$f_a + f_b = f_{a+b} \qquad f_a \cdot f_b = f_{a \cdot b} \qquad f_1 = e_0$$
  Wir können also den Körper K als **Unterring** der Polynome auffassen.
- Skalare Vielfache sind spezielle Produkte von Polynomen, d. h. insbesondere
  $$(a \cdot f) \cdot g = f \cdot (a \cdot g) = a \cdot (f \cdot g)$$
  $\Rightarrow$ Polynome bilden eine **kommutative K-Algebra**
- Definiere spezielle Polynome e_j mit $e_j(i) = \delta_{ij}$
  Es gilt $e_i \cdot e_j = e_{i+j}$.
  $\{e_j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ bildet eine "Standardbasis".
  $$f = f(0)e_0 + f(1)e_1 + \cdots + f(n)e_n, \text{ falls } f(i) = 0 \text{ für } i > n$$
  e_i läßt sich schreiben als $e_i = \underbrace{e_1 \cdot e_1 \cdot e_1 \cdot \cdots \cdot e_1}_{i-mal} = (e_1)^i$
  Zusätzlich setzt man $(e_1)^0 := 1$.
- Die "Unbekannte" X wird definiert als
  $$X := e_1 \qquad\qquad X^i := (e_1)^i = e_i$$
  $\Rightarrow$ Für alle Polynome gilt also:
  $$\begin{aligned} f &= \sum_{i=0}^{n} a_i e_i = a_0 \cdot 1 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \\ &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \end{aligned}$$
  Das bedeutet, daß die "Unbekannte" X nichts anderes als ein spezielles Polynom ist.
  Man bezeichnet die Menge der Polynome über dem Körper K in der Unbekannten X mit $\boldsymbol{K[X]}$.
- Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß man in Polynome
  $$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$
  beliebige Elemente $u \in \mathcal{A}$ einsetzen kann, wobei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra ist, d. h.
  $$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n \quad \in \mathcal{A}$$

7.3 Satz:
$\mathcal{A}$ sei eine K-Algebra. Für jedes $u \in \mathcal{A}$ erhält man durch

$$\varphi_u : K[X] \to \mathcal{A} : f \mapsto f(u)$$

einen Homomorphismus von K-Algebren.

Beweis:
Wir haben $\varphi_u(X^j) = u^j$.
Skalarmultiplikation und Addition sind koeffizientenweise definiert.
$\Rightarrow$ φ_u ist linear.
$\varphi_u(X^j) \cdot \varphi_u(X^i) = u^j \cdot u^i = u^{i+j} = \varphi_u(X^{i+j}) = \varphi_u(X^j \cdot X^i)$.
$\Rightarrow$ $\varphi_u(f) \cdot \varphi_u(g) = \varphi_u(f \cdot g) \qquad \forall f, g \in K[X]$.
Insbesondere ist $\varphi_u(1) = 1$.
D. h. φ_u ist ein Homomorphismus von K-Algebren. □

Beispiele:

1. $A \in K^{n \times n}$ ist Element einer K-Algebra, sei $f \in K[X]$.

$$f(A) = a_0 E_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n$$

2. Polynome selbst sind eine K-Algebra. Seien $f, h \in K[X]$.

$$f(h(X)) = a_0 + a_1 h(X) + \cdots + a_n (h(x))^n$$

3. Einsetzen des Körpers selbst. Sei $f \in K[X]$ und $t \in K$.

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \quad \in K$$

Man definiert folgende Zuordnung:

$$\alpha_f : K \to K : t \mapsto f(t)$$

α_f heißt Polynomabbildung.
Man muß im Allgemeinen zwischen dem Polynom f und der Polynomabbildung α_f unterscheiden!
Beispiel: Sei $K = \{0, 1\}$ ein zweielementiger Körper.
$f(X) = X + X^2$ und $g(X) = X + X^3$.
$f(0) = 0^2 + 0 = 0 = 0^3 + 0 = g(0)$
$f(1) = 1^2 + 1 = 0 = 1^3 + 1 = g(1)$
$\Rightarrow$ $\alpha_f = \alpha_g$, aber $f \neq g$.
Bei endlichen Körpern muß man also aufpassen!

Sei $f \in K[X]$ mit

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

Eine **Nullstelle von f in K** ist ein Element $t \in K$ mit

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = 0$$

Die Existenz von Nullstellen hängt vom Körper ab, z. B.

$$\begin{array}{rll} f(X) = X^2 + 1 & \in \mathbb{R}[X] & \text{keine Nullstellen} \\ & \in \mathbb{C}[X] & \text{Nullstellen } \pm i \\ f(X) = X^2 - 2 & \in \mathbb{R}[X] & \text{Nullstellen } \pm\sqrt{2} \\ & \in \mathbb{Q}[X] & \text{keine Nullstellen} \end{array}$$

Sei $f(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist **Grad(f) = n**.
Der Grad ist nur definiert, falls $f \not\equiv 0$ ist, d. h. das Nullpolynom hat keinen Grad.

Eigenschaften von Grad(f):

- $\operatorname{Grad} : K[X] \to \mathbb{N}$
- $\operatorname{Grad}(f+g) \leq \max\{\operatorname{Grad}(f), \operatorname{Grad}(g)\}$
- $\operatorname{Grad} sf = \operatorname{Grad} f$
- $\operatorname{Grad} f \cdot g = \operatorname{Grad} f + \operatorname{Grad} g$

$$P_n(X) = \{f \in K[X] \mid f \equiv 0 \;\vee\; \operatorname{Grad}(f) \leq n\}$$

ist ein Untervektorraum von $K[X]$ mit der Basis $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$

$g \in K[X]$ ist ein **Teiler** von $f \in K[X]$ genau dann, wenn es ein $h \in K[X]$ gibt mit

$$f = g \cdot h$$

7.4 Satz:

Ein Element $t \in K$ ist genau dann eine Nullstelle von $f \in K[X]$, wenn $X - t$ ein Teiler von f ist.

Beweis:
"$\Leftarrow$" Sei $f(X) = h(X) \cdot (X - t)$. Dann ist $f(t) = h(t) \cdot (t - t) = 0$.
"$\Rightarrow$" Sei $f(t) = 0$.
Dann ist $f(X) = f(X) - f(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_i X^i - a_i t^i) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i (X^i - t^i)$
Für $i \leq 2$ gilt: $(X^i - t^i) = (X - t)(X^{i-1} + tX^{i-2} + \cdots + t^{i-1}) = (X - t)h(X)$.

□

Die **Vielfachheit einer Nullstelle** t ist die größte natürliche Zahl m, für die $(X-t)^m$ ein Teiler von f ist.

7.5 Satz:

$f \in K[X]$ sei ein Polynom vom Grade n. Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen von f in K ist höchstens n.

Beweis:

Seien $t_1, \dots, t_k$ Nullstellen von f mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k$.
$f(X) = (X-t_1)^{M_1}(X-t_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (X-t_k)^{m_k} \cdot g(X)$
$n = \mathrm{Grad}(f) = m_1 + m_2 + \dots + m_k + \mathrm{Grad}(g) \geq m_1 + m_2 + \dots + m_k$. □

7.6 Folgerung:

K sei ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Liefern zwei Polynome $f, g \in K[X]$ dieselbe Polynomabbildung, so gilt $f \equiv g$ in $K[X]$.

Beweis:

Für alle $t \in K$ gilt: $f(t) = g(t)$, d. h. $h := f - g$ hat unendlich viele Nullstellen.
$\Rightarrow$ Nach Satz 7.5 gilt: $h \equiv 0$. □

Man sagt, daß $f \in K[X]$ **vollständig in Linearfaktoren zerfällt**, wenn

$$f(X) = a \cdot (X-t_1)^{m_1}(X-t_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (X-t_k)^{m_k}$$

wobei a der Koeffizient des höchsten Gliedes ist.

- Es gibt Beispiele von Polynomen in $\mathbb{R}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$, ..., die keine Nullstellen haben.
- Man kann aber ein Polynom $f \in K[X]$ immer in Faktoren zerlegen, die nicht weiter zerlegbar sind.
- Schreibweise: g ist ein Teiler von $f \quad \Leftrightarrow \quad f = g \cdot h \quad \Leftrightarrow g | f$.
- Körperelemente sind die einzigen Polynome mit multiplikativen Inversen.
- Jedes Polynom $f \in K[X]$ hat dieselben Teiler wie $a \cdot f$, $a \neq 0$. Wir können uns also auf **normierte Polynome** beschränken, d. h. auf Polynome $f \not\equiv 0$, bei denen der Koeffizient des höchsten Gliedes 1 ist.

7.7 Definition: irreduzibel

*$f \in K[X]$ sei ein Polynom mit $\mathrm{Grad}(f) \geq 1$. f ist **irreduzibel**, wenn f keine Teiler $g \in K[X]$ mit $1 \leq \mathrm{Grad}\, g < \mathrm{Grad}(f)$ besitzt.*

Das heißt: f hat keine trivialen Teiler $a \neq 0$.
Ob f irreduzibel ist, hängt vom Körper ab:

$$\begin{array}{lll} f(X) = X^2 - 2 & \in \mathbb{Q}[X] & \text{irreduzibel} \\ & \in \mathbb{R}[X] & \text{zerlegbar} \end{array}$$

7.8 Satz:

$f \in K[X]$ sei ein normiertes Polynom mit $\mathrm{Grad}\, f \geq 1$.
f besitzt eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Darstellung

$$f = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$$

mit verschiedenen normierten irreduziblen Polynomen $p_i \in K[X]$ mit Vielfachheiten $m_i \geq 1$.

Beweis:

Induktion über $\mathrm{Grad}(f)$:

Induktionsanfang: Sei $\mathrm{Grad}(f) = 1$: Beh. klar!

Sei $\mathrm{Grad}(f) = n$, sei die Aussage für alle Polynome mit Grad $\leq n-1$ bewiesen.
Entweder ist f irreduzibel; dann sind wir fertig. Oder f besitzt nichttriviale Teiler, d. h. $f = g \cdot h$ mit $1 \leq \mathrm{Grad}(g) \leq \mathrm{Grad}(h) < \mathrm{Grad}(f) \leq n$.
Dann besitzen aber g, h die gewünschte Zerlegung, und somit auch f.

Es bleibt nur noch die Eindeutigkeit der Darstellung nachzuweisen. Dazu brauchen wir aber folgendes Lemma:

7.9 Lemma: (von Euklid)

$p \in K[X]$ sei ein irreduzibles Polynom. Teilt p ein Produkt $g \cdot h$, so teilt p einen der beiden Faktoren g oder h.

Beweis:

beruht auf Teilern mit Rest. Siehe Buch: Bosch, Algebra. □

Seien $f = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ zwei Zerlegungen mit p_i, q_i irreduzibel, aber nicht notwendigerweise verschieden.
Nach Lemma 7.9 gilt: p_1 teilt q_{j_1}. Da beide irreduzibel sind, muß $q_{j_1} = p_1$ sein.
Umnumerieren, so daß q_{j_1} das erste Polynom ist.
$\Rightarrow \; p_1(p_2 \cdots p_r - q_2 \cdots q_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$.
Wiederholung des Arguments liefert: $r = s$ und $p_i = q_i$ (ggf. umnumerieren).
□

7.2 Komplexe Zahlen

Naiver Zugang:

- $x^2 + 1 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar. Postuliere also i mit $i^2 = -1$.
- Betrachte Linearkombinationen von 1 und i, d. h. $a + ib$.
- Beim Rechen beachten wir: $i^2 = -1$

Formaler Zugang:

- Betrachte $\mathbb{R}^2$ und definiere auf folgende Art eine Multplikation:

  $$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

  Dann bildet $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ einen Körper.
  Beweis:
  Addition: $(\mathbb{R}^2, +)$ bildet einen Vektorraum.
  Kommutativität der Multiplikation: Die Definition der Mult. ist symmetrisch in den Indizes
  Einselement: $(1, 0)$, da $(1, 0)(a, b) = (a, b)$.
  Inverses: $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.
  Assoziativität, Distributivität durch Nachrechnen.

- $\mathbb{R}^2$ mit obiger Multiplikation ist ein Körper; er heißt **Körper der komplexen Zahlen** und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

- Wir wollen jetzt den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ einbetten. Dazu betrachten wir die Menge

  $$R = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

  Wie man leicht durch Nachrechnen feststellt, ist R abgeschlossen bezüglich Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation. Mit R können wir rechnen wie mit $\mathbb{R}$:

  $$j : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : a \mapsto (a, 0)$$

  j ist linear und injektiv. Es ist $j(\mathbb{R}) = R$, d. h. $j : \mathbb{R} \to R$ ist ein Isomorphismus. Wir können deshalb R und $\mathbb{R}$ identifizieren.

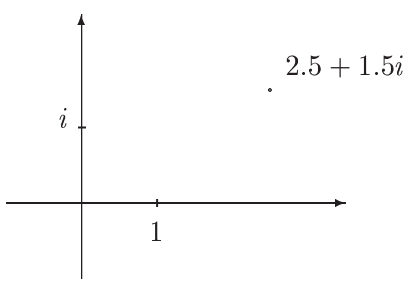
- Was ist nun dieses "i"?
  Wir stellen fest, daß das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ ein Nullstelle besitzt, nämlich gilt: $(0, 1) \cdot (0, 1) + (1, 0) = (-1, 0) + (1, 0) = (0, 0)$.
  Definiere $i := (0, 1)$ und bezeichne $(1, 0) = 1$.
  Nun sind aber $(1, 0)$ und $(0, 1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$, d. h. für alle $(a, b) \in \mathbb{C}$ gilt: $(a, b) = (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + ib$.
  Also ist $a + ib$ nur eine andere Schreibweise für $(a, b) \in \mathbb{C}$.

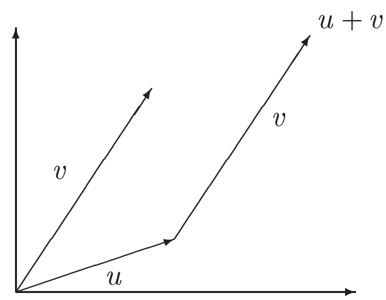
- Sei nun $z = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Dann ist

$\mathrm{Re}(z) = a$ der **Realteil** von z
$\mathrm{Im}(z) = b$ der **Imaginärteil** von z
$\overline{z} = a - ib$ die **konjugiert-komplexe Zahl**.

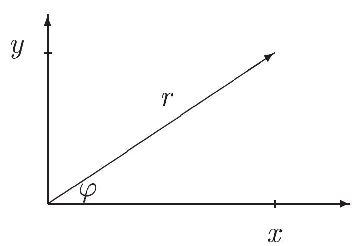
- Seien $z,\ u \in \mathbb{C}$ Dann gilt:
  $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \overline{z}$
  $\overline{\overline{z}} = z$
  $\overline{z+u} = \overline{z} + \overline{u}$
  $\overline{z \cdot u} = \overline{z} \cdot \overline{u}$
  Also ist die Abbildung
  $$\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \overline{z}$$
  ein bijektiver Ringhomomorphismus.

- Veranschaulichung:





Die Addition ist komponentenweise definiert; sie richtet sich nach der Parallelogrammregel.



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists!$ Darstellung $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$.
r heißt **Betrag** von z, geschrieben: $r = |z|$. Der Betrag hat folgende Eigenschaften:
$|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$
$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Dreiecksungleichung
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

- Multiplikation in Polarkoordinaten:
  Sei $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ und $w = t\cos\psi + it\sin\psi$. Dann ist:
  $$\begin{aligned} z \cdot w &= rt(\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi) + irt(\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\ &= rt\cos(\varphi+\psi) + irt\sin(\varphi+\psi) \end{aligned}$$
  D. h. Beträge multiplizieren, Winkel addieren.

- Bemerkung zu den Nullstellen von Polynomen:
  Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ Somit ist auch $f \in \mathbb{C}[X]$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Nullstelle von f. Dann ist $\overline{\lambda}$ Nullstelle von f.
  Beweis:
  $$f(\overline{\lambda}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\overline{\lambda})^i = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \bar{\lambda}^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \lambda^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i} = \overline{f(\lambda)} = 0$$
  Spezialfälle:
  - lineares Polynom:
    $a_0 + a_1 X = 0 \qquad \Rightarrow \quad X = -\frac{a_0}{a_1} \in \mathbb{R}.$
  - quadratisches Polynom:
    $f(X) = X^2 + aX + b = (X + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + b$
    $f(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - b$
    1. Fall: $\frac{a^2}{4} - b > 0: \qquad X_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
    2. Fall: $\frac{a^2}{4} - b < 0: \qquad X_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$

7.10 Satz: (Hauptsatz der Algebra)
Jedes nicht-konstante Polynom aus $\mathbb{C}[X]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

Beweis:
Nach Gauß, evtl. Analysis oder Funktionentheorie. □

Satz 7.10 besagt also: Die einzigen irreduziblen Polynome sind die linearen Polynome, und jedes Polynom in $\mathbb{C}$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

7.3 Quotientenräume

Beispiel:

Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Sei U die Menge der ungeraden Zahlen und G die Menge der geraden Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} G + G = G & G \cdot G = G \\ G + U = U = U + G & U \cdot G = G = G \cdot U \\ U + U = G & U \cdot U = U \end{array}$$

$\mathbb{Z}$ wird durch $U = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ungerade}\}$ und $G = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\}$ in zwei Teilmengen zerlegt, so daß gilt: $G \cap U = \emptyset$ und $G \cup U = \mathbb{Z}$.

G und U werden als neue Objekte betrachtet, und auf diesen werden $+$ und $\cdot$ so definiert, daß sie kompatibel mit $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$ sind.

Es wird definiert:

$$p : \mathbb{Z} \to \{G, U\} : n \mapsto \begin{cases} U & \text{falls } n \in U \\ G & \text{falls } n \in G \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\begin{array}{ccccc} p(n) & + & p(m) & = & p(m+n) \\ G & + & G & = & G \\ p(n) & \cdot & p(m) & = & p(n \cdot m) \end{array}$$

Dies entspricht dem Rechnen modulo 2.

Sei $q \in \mathbb{N}$. Wir zerlegen $\mathbb{Z}$ in Klassen $R_0, \dots, R_{q-1}$:
$z \in \mathbb{Z}$ gehört zur Menge R_i genau dann, wenn z bei der Division durch q den Rest i läßt, d. h. wenn $z = rq + i$ mit $0 \leq i \leq q - 1$.
Diese R_i heißen **Restklassen modulo** q. Für diese gilt:

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{q-1} R_i \qquad\qquad R_i \cap R_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\begin{array}{rcl} m, n \in R_i & \Leftrightarrow & m = rq + i,\ n = sq + i \\ & \Leftrightarrow & m - n = (r - s)q \in R_0 \end{array}$$

Sind m und n in derselben Restklasse bezüglich Division durch q enthalten, so schreibt man:

$$m \equiv n \mod q$$

Betrachte $\mathbb{Z}_q = \{R_0, \dots, R_{q-1}\}$. Dann gibt es die kanonische Projektion

$$p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_q : n = rq + i \mapsto R_i$$

Damit gilt:

$$\begin{array}{rcl} m, n \in R_i & \Leftrightarrow & p(m) = p(n) \\ & \Leftrightarrow & m - n \in R_0 \\ & \Leftrightarrow & p(m - n) = R_0 \end{array}$$

Definiere auf $\mathbb{Z}_q$ Addition und Multiplikation durch:

$$\begin{aligned} p(n) + p(m) &= p(n + m) \\ p(n) \cdot p(m) &= p(n \cdot m) \end{aligned}$$

d. h. $R_i + R_j = p(n + m)$ und $R_i \cdot R_j = p(n \cdot m)$, wenn $m \in R_i$ und $n \in R_j$ ist.
Bei einer solchen Definition ist zu zeigen, daß sie unabhängig von der Wahl der Repräsentaten ist.
Seien also $m,\ m' \in R_i$ und $n,\ n' \in R_j$. Dann gilt: $m - m' = r \cdot q$ und $n - n' = s \cdot q$.
$m - m' + n - n' = (r + s)q = m + n - (m' + n')$. Also liegen $m + n$ und $m' + n'$

in derselben Restklasse.
$m \cdot n - m' \cdot n' = m(n-n') - n'(m'-m) = m \cdot sq + n' \cdot rq = r(ms + n'r) \in R_0$.
Also sind auch mn und $m'n'$ aus derselben Restklasse.

Wie man leicht nachrechnen kann, bildet $(\mathbb{Z}_q, +, \cdot)$ einen Ring. Er heißt **Restklassenring** von $\mathbb{Z}$ nach q.

7.11 Definition: Äquivalenzrelation

*E sei eine Menge. Eine für Paare $(x, y) \in E \times E$ erklärte Relation $x \sim x$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn gilt:*

1) $x \sim x$ *(Reflexivität)*

2) $x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x$ *(Symmetrie)*

3) $x \sim y \quad \wedge \quad y \sim z \quad \Rightarrow \quad x \sim z$ *(Transitivität)*

Sprechweise: x ist äquivalent zu y.

Für alle $x \in E$ definieren wir die **Äquivalenzklasse** von x mittels

$$\hat{x} = \{y \in E \mid x \sim y\}$$

7.12 Lemma:

1.) $x \in \hat{x}$

2.) $\hat{x} = \hat{y} \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y$

3.) $\hat{x} \neq \hat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$

Beweis:

1. $x \sim x$.
2. Sei $\hat{x} = \hat{y} \quad \Rightarrow \quad x \in \hat{x} \quad \Rightarrow \quad x \in \hat{y}$
   Somit ist $\Rightarrow \ x \sim y$
   Sei $x \sim y$. Sei $z \in \hat{y}$. Dann ist $z \sim x$, d. h. $z \in \hat{x}$.
   Also ist $\hat{y} \subseteq \hat{x}$. Andere Richtung der Inklusion analog.
3. Beh. ist äquivalent zu $\hat{x} = \hat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x} \cap \hat{y} \neq \emptyset$.
   “$\Leftarrow$” Sei $\hat{x} \cap \hat{y} \neq \emptyset$, d. h. $\exists\, z \in \hat{x} \cap \hat{y}$.
   Dann gilt: $x \sim z$ und $y \sim z$. Also gilt auch $x \sim y$. Nach 2. ist $\hat{x} = \hat{y}$.
   “$\Rightarrow$” Sei $\hat{x} = \hat{y} \quad \Rightarrow \quad x \in \hat{x} \cap \hat{y} \quad \Rightarrow$ Beh.

□

Damit haben wir gezeigt: Eine Äquivalenzrelatin induziert eine Zerlegung von E in Klassen mit der Eigenschaft:

$$E = \bigcup_{x \in E} \hat{x} \qquad\qquad \hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x} \neq \hat{y}$$

7.13 Definition: Quotient

*Es sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge E. Unter dem **Quotient** E/R von E nach der Äquivalenzrelation R versteht man die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. R. Diese Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet man mit E/R (zu lesen: E modulo R).*

Sei E eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf E.

$$p : E \to E/R : x \mapsto \hat{x}$$

heißt **kanonische Projektion** von E auf E/R. p ist surjektiv.

7.14 Lemma:
$U \subseteq V$ sei ein Untervektorraum. Für $x, y \in U$ gilt:

$$x + U = y + U \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in U$$

Beweis:
"$\Rightarrow$" Sei $x + U = y + U$.
$\Rightarrow \ \exists\, u_0 \in U : \ x = y + u_0$
$\Rightarrow \ x - y = u_0 \in U$.
"$\Leftarrow$" Sei $x - y = u_0 \in U$.
$x + U = y + u_0 + U \subseteq y + U = x - u_0 + U \subseteq x + U$
$\Rightarrow \ x + U = y + U$

□

Jetzt definieren wir eine Äquivalenzrelation mittels

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in U$$

Dies wird oft geschrieben als $x \equiv y \mod U$. Die Menge der Äquivalenzrelationen bezeichnen wir mit V/U. Es ist zu zeigen, daß $x \sim y$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist:

Beweis:

i. Reflexivität:
$x \sim x \quad \Leftrightarrow x - x = 0 \in U$

ii. Symmetrie:
$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in U \quad \Rightarrow \quad -1(x - y) = y - x \in U \quad \Rightarrow \quad y \sim x$.

iii. Transitivität:
Sei $x \sim y$ und $y \sim z \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in U \ \wedge \ y - z \in U$
$\Rightarrow \ (x - y) + (y - z) = (y - z) \in U \quad \Rightarrow \quad x \sim z$. □

Die Elemente von V/U sind die affinen Unterräume mit Richtungsraum U, d. h.

$$\hat{x} = \{y \in V \mid x - y \in U\} = x + U$$

Beweis:

"$\subseteq$" Sei $y \in \hat{x} \quad \Rightarrow \quad x - y \in U$, d. h. $x - y = u_0 \in U$
$y = x - u_0 \in x + U$. Also ist $\hat{x} \subseteq x + U$

"$\supseteq$" Sei $y \in x + U \quad \Rightarrow \quad y = x + u_0$
$\Rightarrow \; y - x = u_0 \in U \quad \Rightarrow \quad y \in \hat{x}$.

□

Mache V/U zum Vektorraum
Definiere Addition und Skalarmultiplikation:

- Addition:
  Seien $\hat{x}, \hat{y} \in V/U$. Dann sei

  $$\hat{x} + \hat{y} = \text{ Äquivalenzklasse von } (x + y) \; = \widehat{x + y}$$

  Es muß gezeigt werden, daß die Definition unabhängig vom Repräsentanten ist:
  Seien $x_1, x_2 \in \hat{x}$ und $y_1, y_2 \in \hat{y}$.
  Wir wollen zeigen, daß $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in U$ ist.
  $x_1 - x_2 \in U$ und $y_1 - y_2 \in U$. Somit ist auch $x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) \in U$ Dies bedeutet $\widehat{x_1 + y_1} = \widehat{x_2 + y_2}$. Die Definition ist sinnvoll.

- Skalarmultiplikation:
  Sei $r \in K$ und $\hat{x} \in V/U$. Definiere dann:

  $$r \cdot \hat{x} = \widehat{rx}$$

  Wiederum ist die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentaten zu zeigen, d. h. seien $x_1, x_2 \in V/U$.
  Dann ist $x_1 - x_2 \in U$, also auch $r(x_1 - x_2) = rx_1 - rx_2 \in U$.

V/U mit den oben definierten Operationen ist wiederum ein Vektorraum. Er heißt **Quotientenvektorraum**.

Beweis:
Z. B. Assoziativität der Addition:
Da $x \in \hat{x}$, $y \in \hat{y}$, $z \in \hat{z} \ldots$ und da V ein Vektorraum ist, gilt:
$(\hat{x} + \hat{y}) + \hat{z} = \widehat{x + y} + \hat{z} = (\widehat{x + y) + z} = x + \widehat{(y + z)} = \hat{x} + \widehat{y + z} = \hat{x} + (\hat{y} + \hat{z})$.
u.s.w □

7.15 Satz:
$U \subseteq V$ sei ein Vektorraum. Die kanonische Projektion $p : V \to V/U$ ist eine surjektive, lineare Abbildung mit $\mathrm{Ker}(p) = U$.

Beweis:

- Surjektivität gilt allgemein für kanonische Abbildungen.
- Linearität:
  $p(u+v) = \widehat{u+v} = \hat{u} + \hat{v} = p(u) + p(v)$
  $p(ru) = \widehat{ru} = r\hat{u} = rp(u)$.
- Kern:
  $p(u) = \hat{0} \quad \Leftrightarrow \quad u - 0 \in U \quad \Leftrightarrow \quad u \in U.$

$\square$

Dimension von U/V:
Sei $\dim V < \infty$. Nach der Dimensionsformel gilt:

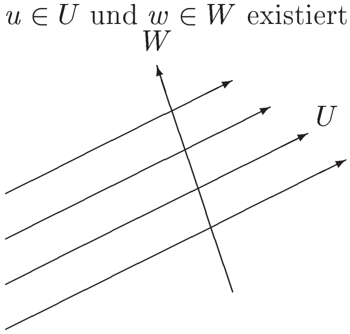
$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

Der Umgang mit V/U wird dadurch vereinfacht, daß V/U wieder ein Vektorraum ist, der isomorph zu einen Untervektorraum von V ist.

Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, sei $\dim V < \infty$.
Wir haben früher schon gezeigt:

$$\forall\, U \subseteq V \ \exists \,\text{Untervektorraum } W : \ U \oplus W = V$$

Das bedeutet, daß für alle $v \in V$ eine eindeutige Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ existiert.



Das Supplement W schneidet alle affinen Unterräume $v + U$ ein genau einem Punkt.

Beweis:
$v \in V \quad \Rightarrow \quad \exists!\,\text{Darstellung} : \ v = u + w.$
$\Rightarrow \ x + U \ni x - u = w \in W$
$\Rightarrow \quad x + U \cap W = \{w\}.$ $\square$

7.16 Satz:
$U \subseteq V$ sei ein Untervektorraum. Ist W ein Supplement zu U, so liefert die Einschränkung von $p : V \to V/U$ auf W einen Isomorphismus:

$$p|_W : W \to V/U, \ \text{d. h. } W \cong V/U$$

Beweis:

– $p|_W$ injektiv: Sei $w \in W$ derart, daß $p(w) = 0$.
  $\Rightarrow \ p \in U \quad \Rightarrow \quad w \in W \cap U$, d. h. $w = 0$

– $p|_W$ surjektiv: Wir wissen, daß $p : V \to V/U$ surjektiv ist.
  Sei $x \in V$. x besitzt eine eindeutige Darstellung $x = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.
  $p(x) = p(u + w) = p(u) + p(w) = p(w) = p|_W(w)$.

$\square$

7.17 Satz:

$U \subseteq V$ sei ein Unterverktorraum, $f : V \to W$ sei linear. Es gibt genau dann eine lineare Abbildung

$$g : V/U \to W \quad \textit{mit} \quad g \circ p = f$$

wenn $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

Bildlich:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & W \\ & V/U \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

p ist surjektiv, d. h. g ist durch $g \circ p = f$ eindeutig festgelegt.
g heißt die **durch f induzierte Abbildung**.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $g : V/U \to W$ gegeben durch $g \circ p = f$.
Sei $u \in U$. Dann ist $f(u) = g(p(u)) = g(\hat{0}) = 0$, d. h. $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

"$\Leftarrow$" Sei $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.
Wir definieren: $g(\hat{x}) = f(x)$, falls $p(x) = \hat{x}$. Wir müssen also noch zeigen, daß die Definition unabhängig vom Repräsentanten und linear ist.
1. Repräsentantenunabhängigkeit, d. h. $\forall x, y \in \hat{z} : f(x) = f(y)$
Seien $x, y \in \hat{z}$: $x - y \in U \quad \Rightarrow \quad f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$.
g ist also wohldefiniert durch $g \circ p = f$.
2. Linearität: seien $\hat{x}, \hat{y} \in V/U$.
$g(\hat{x} + \hat{y}) = g(\widehat{x + y}) = f(x + y) = f(x) + f(y) = g(\hat{x}) + g(\hat{y})$.
$g(r\hat{x}) = g(\widehat{rx}) = f(rx) = rf(x) = rg(\hat{x})$.

$\square$

7.18 Lemma:

$f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. f induziert einen Isomorphismus

$$\bar{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$$

d. h. $V/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$.

Beweis:

$f : V \to W$ kann man auffassen als $\tilde{f} : V \to \mathrm{Im}(f)$. $\tilde{f}$ ist surjektiv und $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\tilde{f})$.
Aus Satz 7.17 folgt dann: $\tilde{f}$ ist linear und induziert eine lineare Abbildung $\bar{f} : V/\,\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, so daß gilt: $\bar{f} \circ p = \tilde{f} = f$.
$\Rightarrow$ $\bar{f}$ ist surjektiv.
Sei $\hat{x} \in V/\,\mathrm{Ker}(f)$ mit $\bar{f}(\hat{v}) = 0$.
Aber $\bar{f}(\hat{x}) = \tilde{f}(x)$, d. h. $x \in \mathrm{Ker}(\tilde{f}) = \mathrm{Ker}(f)$. Also ist $\hat{x} = 0$.
$\bar{f}$ ist injektiv. $\square$

$$\bar{f} : V/\,\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f) : \hat{x} = x + \mathrm{Ker}(f) \mapsto f(x)$$

7.19 Lemma:

$U \subseteq V$ sei ein Untervektorraum. Man hat einen kanonischen Isomorphismus des Annihilators von U mit dem Dualraum von V/U.

Beweis:

Annihilator $U' \subseteq V^*$. Dann gilt: $\lambda \in U' \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(v) = 0$ für alle $v \in U$,
d. h. $U \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda)$ und $\lambda : V \to K$.
Nach 7.17 und 7.18 gilt:
λ liefert induzierte Linearform $\bar{\lambda} : V/U \to K$ mit $\bar{\lambda} \circ p = \lambda$.
Wir definieren:

$$j : U' \to (V/U)^* : \lambda \mapsto \bar{\lambda}$$

- j ist linear:

$$\begin{aligned} j(\lambda + \mu)(\hat{x}) &= (\overline{\lambda + \mu})(\hat{x}) = (\lambda + \mu)(x) \\ &= \lambda(x) + \mu(x) = \bar{\lambda}(\hat{x}) + \bar{\mu}(\hat{x}) \\ &= (j(\lambda) + j(\mu))(\hat{x}) \end{aligned}$$

  $j(r\lambda) = rj(\lambda)$ analog.

- j ist injektiv:
  Sei λ derart, daß $j(\lambda) = 0$, d. h. für alle $\hat{x} \in V/U$ gilt:
  $j(\lambda)(\hat{x}) = \bar{\lambda}(\hat{x}) = \lambda(x) = 0$. Dann ist $\lambda = 0$.

- j ist surjektiv:
  Sei $\bar{\lambda} \in (V/U)^*$, d. h. $\bar{\lambda} : V/U \to K$.
  Definiere $\lambda : V \to K : \lambda(x) = \bar{\lambda}(\hat{x}) = \bar{\lambda}(p(x))$.
  $\Rightarrow$ $\lambda \in V^*$. Sei jetzt $x \in U$.
  $\lambda(x) = \bar{\lambda}(\hat{x}) = \bar{\lambda}(p(x)) = \bar{\lambda}(\hat{0}) = 0$
  $\Rightarrow$ $\lambda \in U'$.
  Nach Konstruktion von j gilt: $j(\lambda) = \bar{\lambda}$, d. h. j ist surjektiv.

$\square$

Index