Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

3.5.2000

Lineare Algebra II

SS 2000 — Blatt 1

Abgabe: **Montag, 8.5.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(2 Punkte)**

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sei durch

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

eine Multiplikation definiert. Zeigen Sie, dass diese das Assoziativitäts- und das Distributivitätsgesetz erfüllt.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Auf $\mathbb{R}[X]$ definieren wir eine Relation $\sim$ durch

$$f \sim g \qquad :\Leftrightarrow \qquad \exists h \in \mathbb{R}[X] \text{ mit } f - g = (1 + X^2)h.$$

(a) Beweisen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass aus $f_1 \sim f_2$ und $g_1 \sim g_2$ folgt: $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$.
Hieraus folgt, dass man auf $\mathbb{R}[X]/\sim$ via

$$\widehat{f} \cdot \widehat{g} := \widehat{f \cdot g}$$

ein Multiplikation definieren kann. Hierbei steht $\widehat{f}$ für die Äquivalenzklasse von f. Damit wird $\mathbb{R}[X]/\sim$ zur $\mathbb{R}$–Algebra.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei X die $\mathbb{R}$–Algebra aus Aufgabe 1 und Y die $\mathbb{R}$–Algebra aus Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\ : X &\to Y \\ (a, b) &\mapsto (a\,X + b)^\frown \end{aligned}$$

ein Algebrenisomorphismus ist, d.h. ein Algebrenhomomorphismus, der zusätzlich injektiv und surjektiv ist. (Hierbei bezeichnet $\widehat{\ }$ die Äquivalenzklasse.)