Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička

Dipl.-Math. L. Diening

15.5.2000

Lineare Algebra II

SS 2000 — Blatt 3

Abgabe: **Montag, 22.5.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(3 Punkte)**

Berechnen Sie die Determinanten von

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Beweisen Sie mit Induktion über n, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Dies ist die sogenannte *Vandermonde–Determinante*.

Hinweis: Versuchen Sie es mit Spaltenumformungen!

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $n \ge 1$ und $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Weiterhin seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass es Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n-1} a_j \, x^j$$

gilt:

$$p(x_k) = b_k \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Dies bedeutet, dass es ein Polynom p vom Grade maximal $n-1$ gibt, so dass p an den vorgegebenen Stützstellen $x_1, \dots, x_n$ die vorgegebenen Werte $b_1, \dots, b_n$ annimmt.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie

(a) $(\mathrm{adj}(A^T)) = (\mathrm{adj}(A))^T$,

(b) $\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$,

(c) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-2} \cdot A$,

(d) $\mathrm{adj}(A) \cdot \mathrm{adj}(B) = \mathrm{adj}(B \cdot A)$.

Aufgabe 5 **(2 Punkte)**

Sei $m > n$ und $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie

$$\det(A \cdot B^T) = 0.$$