Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička

Dipl.-Math. L. Diening

22.5.2000

Lineare Algebra II

SS 2000 — Blatt 4

Abgabe: **Montag, 29.5.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(1 Punkt)**

Sei $v_1 := (1, 0, 3, -2)^T$ und $v_2 := (2, 1, 5, 1)^T$. Berechnen Sie die Fläche, des von v_1 und v_2 aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

Sei $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 1+a^2 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1+a^2 & \text{für } i = j, \\ a & \text{für } i = j+1, \\ a & \text{für } i = j-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det(A)$ für beliebiges(!) n.

Aufgabe 3 **(2 Punkte)**

Für $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ sei

$$v_1 \times v_2 := \begin{pmatrix} a_2 b_3 & - & a_3 b_2 \\ a_3 b_1 & - & a_1 b_3 \\ a_1 b_2 & - & a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;:\; (v, w) \mapsto v \times w$$

bilinear und antisymmetrisch ist. Antisymmetrisch bedeutet $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$ für alle $v, w, \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Berechnen Sie die Orientierung des Systems $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ bzgl. der Standardorientierung.

Definition: Seien $m, n \geq 1$. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{m \times n} \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1}(t) & \cdots & \varphi_{mn}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heisst *stetig* genau dann, wenn die Abbildungen $\varphi_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ stetig sind.

Aufgabe 5 **(5 Punkte)**

Sei $n \geq 1$ und $\varphi : [0,1] \to \mathrm{G}\ell_n(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass das System der Spaltenvektoren von $\varphi(0)$ und das System der Spaltenvektoren von $\varphi(1)$ die gleiche Orientierung haben.

Definition: Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Gibt es einen Vektor $v_0 \in V$ mit $v_0 \neq 0$, so dass $\varphi(v_0, w) = 0$ für alle $w \in V$, so heisst V *ausgeartet.* Gibt es keinen solchen Vektor v_0, so heisst φ *nicht–ausgeartet.*

Aufgabe 6 **(3 Punkte)**

Sei $v_1, \ldots, v_n$ die Basis eines Vektorraums V und $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Die Matrix $A := (\varphi(v_j, v_k))_{1 \leq j,k \leq n}$ nennt man die Gramsche Matrix von φ.
Beweisen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn φ nicht–ausgeartet ist.

Aufgabe 7 **(3 Punkte)**

Sei $n \geq 1$ und seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, Weiterhin sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} x & & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(A)$ für beliebiges(!) n.