Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička

Dipl.-Math. L. Diening

29.5.2000

Lineare Algebra II

SS 2000 — Blatt 5

Abgabe: **Montag, 05.06.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir

$$\nu(\sigma) := \text{„Anzahl der Paare } (i,j) \text{ mit } 1 \leq i < j \leq n \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\text{“}$$

und

$$\gamma(\sigma) := (-1)^{\nu(\sigma)}.$$

Beweisen Sie $\gamma(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$, wobei $\varepsilon(\sigma)$ das Signum von σ (bzgl. eines Ringes) ist.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Die Menge

$$A_n := \{\sigma \in S_n \,:\, \varepsilon(\sigma) = 1\}$$

heisst die *alternierende Gruppe* von S_n.

(a) Man zeige, dass für $n \geq 2$ die Menge A_n die Mächtigkeit $\frac{1}{2}\, n!$ hat.

(b) Man bestimme alle Elemente von A_4.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

(a) Sei $V := \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$. Weiterhin seien $A, B \in V^{n \times n}$ mit $A \cdot B = E$, wobei $E \in V^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist. Zeigen Sie $\det(A) = \pm 1$.

(b) Sei $W := \mathbb{R}[X]$ und $m \geq 1$. Weiterhin seien $C, D \in W^{m \times m}$ mit $C \cdot D = E$, wobei $E \in W^{m \times m}$ die Einheitsmatrix ist. Zeigen Sie $\det(C) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**

Stellen Sie folgenden Permutationen jeweils als Produkt von speziellen Transpositionen dar (das sind $\tau_{12}, \tau_{23}, \dots\dots\tau_{n-1,n}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Die *Ordnung einer Permutation* $\sigma \in S_n$ ist definiert als die kleinste ganze Zahl $k > 0$ mit $\sigma^k = id$.

Beweisen Sie:

(a) Für $\sigma \in S_n$ ist die Ordnung von σ stets kleiner gleich $n!$ (Fakultät kein Ausrufezeichen).

(b) Sei $\sigma \in S_n$ und B eine Bahn von σ, dann ist die Länge von B ein Teiler der Ordnung von σ.