Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička

Dipl.-Math. L. Diening

05.06.2000

Lineare Algebra II

SS 2000 — Blatt 6

Abgabe: **Montag, 19.06.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A nicht diagonalisierbar ist.

b) Sei

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von B und geben Sie für jeden Eigenwert λ den Eigenraum $E(\lambda)$ an. Prüfen und begründen Sie, ob B diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A.

a) Zeigen Sie, dass λ auch ein Eigenwert von A^T ist.

b) Sei A zusätzlich invertierbar. Zeigen Sie, dass $\lambda \neq 0$ ist und dass $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1} ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie:

a) Es gelte $AB = BA$. Weiterhin seien alle Eigenwerte von A und B einfach, das heisst die Eigenräume sind eindimensional. Zeigen Sie, dass A und B die gleichen Eigenvektoren haben. (Die Eigenwerte müssen nicht übereinstimmen!)

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^n$, bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren von A und B, so ist $AB = BA$.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass

$$A \approx B \quad :\Longleftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind „ähnlich"}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert. Beweisen Sie weiterhin, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polymom haben.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ sei $\langle A, B\rangle$ definiert durch

$$\langle A, B\rangle := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Diese Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Skalarprokukt auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Deshalb kann man durch

$$\|A\| := \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definieren.

a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.
(Hierbei ist $\|y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$ für $y \in \mathbb{R}^n$.)

b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

c) Sei λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie $|\lambda| \le \|A\|$.

Aufgabe 6 **(2 Punkte)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Zeigen Sie, dass A keine negativen Eigenwerte hat.

Übrigens, auf der Web–Seite
http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/la2_SS00/
finden Sie immer die aktuellen Aufgabenzettel, sowie die Musterlösungen zu den bereits besprochenen Zetteln. Man kann diese Seite auch von der Homepage der Mathematik (*http://www.mathematik.uni-freiburg.de*) erreichen, indem man dort erst das „Institut für Angewandte Mathematik", dann „Lehre", dann „Vorlesungsskripte/Übungsblätter" und anschließend „LA II" anklickt.