Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička

Dipl.-Math. L. Diening

19.06.2000

Lineare Algebra II

SS 2000 — Blatt 7

Abgabe: **Montag, 26.06.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(9 Punkte)**

Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle \ , \ \|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Damit wird $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n\times n}$ zu einem normierten Raum. Außerdem gilt (siehe letzter Zettel)

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|, \qquad \|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\| \text{ für } B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a) Sei $A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein Folge von Matrizen. Zeigen Sie, dass A_m genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn jede Komponente eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Matrixmultiplikation stetig ist, d.h. aus $A_m \overset{m}{\to} A$ und $B_m \overset{m}{\to} B$ folgt $A_m \cdot B_m \overset{m}{\to} A \cdot B$. ($A_m \overset{m}{\to} A$ steht für $\lim_{m\to\infty} \|A_m - A\| = 0$.)

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$C_m := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k.$$

Zeigen Sie, dass C_m eine Cauchyfolge ist. Folgern Sie, dass damit

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k$$

wohldefiniert ist.

d) Sei X ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass x ein Eigenvektor von $\exp(A)$ zum Eigenwert $\exp(\lambda)$ ist.

e) Berechnen Sie

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 1 & -14 \\ 20 & -1 & 24 \\ 10 & -1 & 13 \end{pmatrix}.$$

a) Verwandeln Sie A durch Basiswechsel in eine untere Dreiecksmatrix mit Eigenwerten auf der Diagonale. Geben Sie die Basiswechselmatrix an.

b) Berechnen Sie A^{2000}.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Beweisen Sie

$$\chi_A(X) = X^3 - \mathrm{Spur}(A) \cdot X^2 + \mathrm{Spur}(\mathrm{adj}(A)) \cdot X - \det(A).$$