Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička

Dipl.-Math. L. Diening

26.06.2000

Lineare Algebra II

SS 2000 — Blatt 8

Abgabe: **Montag, 03.07.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\|\cdot\|$ wie in Blatt 7.

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\| < 1$ und

$$B_m := \sum_{k=0}^{m} A^k.$$

Zeigen Sie: B_m konvergiert gegen eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es gilt

$$B \cdot (E - A) = (E - A) \cdot B = E,$$

wobei E die Einheitsmatrix ist.
(Hinweis: Berechnen Sie $B_m \cdot (E - A)$ und $(E - A) \cdot B_m$.)
Damit haben Sie gezeigt, dass $E-A$ invertierbar ist mit $(E-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen $G\ell(n, \mathbb{R})$ offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Hierfür müssen Sie folgendes zeigen: Ist $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass alle Matrizen G mit $\|F - G\| < \varepsilon$ invertierbar sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Beweisen Sie, dass A und A^T ähnlich zueinander sind.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Beweisen Sie: f ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom von f nur Nullstellen der Ordnung 1 hat.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe Matrix. Zeigen Sie: Gilt $A^k = E$ für ein $k \geq 1$, so ist A diagonalisierbar. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4.)